Contrôle de mathématiques

Lundi 23 septembre 2013

Exercice 1

ROC **5 points**

1) On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$
   a) Montrer que la somme $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ peut sécrire sous la forme $S_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$
   b) Application : déterminer la somme suivante : $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 1024$
2) a) Donner la formule de la somme S_n des (n+1) premier termes d'une suite arithmétique : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$
   b) Déterminer en fonction de n, la somme des termes suivante :
   $S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1)$

Exercice 2

Algorithme **4 points**

On donne la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 1,5 \quad \text{et pour } n \geqslant 1 \quad u_{n+1} = \frac{nu_n + 1}{2(n+1)}$$

1) Pour calculer u_n, n étant donné, on propose l'algorithme ci-dessous :
   a) Rentrer cet algorithme dans votre calculette, puis donner les valeurs à 10^{-4} des termes : u_2, u_3, u_4.
   ⚠ Attention aux parenthèses
   b) Donner une valeur de u_{100} à 10^{-4} puis conjecturer la limite de la suite.
   c) Comment modifier cet algorithme pour qu'il affiche tous les termes de u_2 à u_n ?

Variables
I, N entiers naturels
U réel
Initialisation
Lire N
$1,5 \to U$
Traitement
Pour I de 2 à N faire
$\quad \dfrac{(I-1)U+1}{2I} \to U$
FinPour
Afficher U

2) En s'inspirant de l'algorithme de la question 1), écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n < 0,001$.
   Utiliser alors cet algoritme pour déterminer n.

Exercice 3

Suite arithmético-géométrique **4 points**

On donne la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{4} + 3$.

1) a) Calculer u_1 et u_2.
   b) Montrer que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2) On pose pour tout entier n, $v_n = u_n - 4$
   a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n puis montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n
   c) Déterminer la convergence de la suite (u_n).

EXERCICE 4

D'après le Bac 2013 **7 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par : $f(x) = \dfrac{3x}{1+2x}$

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1) a) Calculer u_1 et u_2
   b) On a tracé, en annexe , la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.
   Sur le graphique en annexe, placer sur l'axe des abscisses, u_0, u_1, u_2 et u_3. Faire apparaître les traits de construction.
   c) Que peut-on conjecturer sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?
2) Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.
   a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n puis montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
   b) Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.
   d) Montrer que l'on peut mettre u_n sous la forme : $u_n = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$ puis déterminer la limite de la suite (u_n).

Annexe

(À rendre avec la copie)

Nom :

Prénom :