

Devoir à rendre pour le 04 novembre 2014

EXERCICE I

Le nombre d'Apéry

(6 points)

On définit la suite (u_n) pour $n \geq 1$ par : $u_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$

- 1) Donner la valeur exacte de u_1, u_2 et u_3 .
- 2) a) Proposer un algorithme permettant de calculer u_n, n étant donné.
b) Remplir puis compléter le tableau suivant en donnant les valeurs de u_n à 10^{-4} près :

n	5	10	20	50	100
u_n					

- c) Que peut-on dire sur la convergence de la suite ?
- 3) a) (*Être astucieux(euse)*) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$
b) En déduire un majorant de (u_n) puis que (u_n) converge.

EXERCICE II

Limites de fonctions

(3 points)

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x - 1 - \frac{x}{x^2 + 1}$
- 2) a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos x} \leq 1$
b) En déduire la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{2 - \cos x}$
- 3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 + 1}$

EXERCICE III

Étude d'une fonction

(8 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}$

- 1) Calculer les limites en -1 et en $+\infty$ et $-\infty$
- 2) Calculer la fonction dérivée de la fonction f .
- 3) Déterminer le signe de la dérivée puis dresser le tableau de variation de la fonction f .
On calculera les valeurs approchées des extremum de la fonction f à 10^{-2} près.
- 4) Existe-t-il des tangentes à \mathcal{C}_f parallèles à la droite d'équation $y = -4x - 5$? Si oui, donner l'équation de cette ou ces tangente(s).
- 5) Existe-t-il des tangentes à \mathcal{C}_f parallèles à la droite d'équation $3x - 2y = 0$? Si oui, donner l'équation de cette ou ces tangente(s).

- 6) Tracer la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f ainsi que les tangentes trouvées en 4) et 5) sur l'annexe.

⚠ On pourra s'aider d'un tableau de valeurs

EXERCICE IV

Calculs de dérivées

(3 points)

En vous aidant du tableau sur les dérivées des fonctions élémentaires et des règles de dérivation, répondre aux questions suivantes :

- 1) Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$: $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$
- Déterminer la fonction dérivée f'
 - À l'aide d'une factorisation résoudre $f'(x) = 0$
- 2) Soit la fonction g définie sur \mathbb{R}_+ par $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 1}$
- Sur quel intervalle g est-elle dérivable ?
 - Déterminer la fonction dérivée g' .
 - Résoudre $g'(x) = 0$. En déduire les variations de la fonction g .

Annexe
(À rendre avec la copie)

Nom :

Prénom :

