

# Devoir à rendre pour le 04 novembre 2014

## EXERCICE I

### Le nombre d'Apéry

(6 points)

On définit la suite  $(u_n)$  pour  $n \geq 1$  par :  $u_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$

- 1) Donner la valeur exacte de  $u_1, u_2$  et  $u_3$ .
- 2) a) Proposer un algorithme permettant de calculer  $u_n, n$  étant donné.  
b) Remplir puis compléter le tableau suivant en donnant les valeurs de  $u_n$  à  $10^{-4}$  près :

$n$	5	10	20	50	100
$u_n$					

- c) Que peut-on dire sur la convergence de la suite ?
- 3) a) (*Être astucieux(euse)*) Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$   
b) En déduire un majorant de  $(u_n)$  puis que  $(u_n)$  converge.

## EXERCICE II

### Limites de fonctions

(3 points)

- 1) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x - 1 - \frac{x}{x^2 + 1}$
- 2) a) Démontrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos x} \leq 1$   
b) En déduire la limite suivante :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{2 - \cos x}$
- 3) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 + 1}$

## EXERCICE III

### Étude d'une fonction

(8 points)

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \{-1\}$  par :  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}$

- 1) Calculer les limites en  $-1$  et en  $+\infty$  et  $-\infty$
- 2) Calculer la fonction dérivée de la fonction  $f$ .
- 3) Déterminer le signe de la dérivée puis dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .  
On calculera les valeurs approchées des extremum de la fonction  $f$  à  $10^{-2}$  près.
- 4) Existe-t-il des tangentes à  $\mathcal{C}_f$  parallèles à la droite d'équation  $y = -4x - 5$  ? Si oui, donner l'équation de cette ou ces tangente(s).
- 5) Existe-t-il des tangentes à  $\mathcal{C}_f$  parallèles à la droite d'équation  $3x - 2y = 0$  ? Si oui, donner l'équation de cette ou ces tangente(s).

- 6) Tracer la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$  ainsi que les tangentes trouvées en 4) et 5) sur l'annexe.

⚠ On pourra s'aider d'un tableau de valeurs

## EXERCICE IV

---

### Calculs de dérivées

(3 points)

En vous aidant du tableau sur les dérivées des fonctions élémentaires et des règles de dérivation, répondez aux questions suivantes :

- 1) Soit la fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  :  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$
- Déterminer la fonction dérivée  $f'$
  - À l'aide d'une factorisation résoudre  $f'(x) = 0$
- 2) Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 1}$
- Sur quel intervalle  $g$  est-elle dérivable ?
  - Déterminer la fonction dérivée  $g'$ .
  - Résoudre  $g'(x) = 0$ . En déduire les variations de la fonction  $g$ .

**Annexe**  
(À rendre avec la copie)

Nom :

Prénom :

