Contrôle de mathématiques

Jeudi 29 janvier 2015

EXERCICE 1

ROC **(4 points)**

1) Compléter les égalités suivantes pour x et y réels :
   a) $\cos(x + y) = \ldots\ldots$
   b) $\sin(x + y) = \ldots\ldots$

2) On pose $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ où z_1 et z_2 étant deux nombres complexes et r_1 et r_2 deux réels strictement positifs.
   a) Montrer que $|z_1 z_2| = r_1 r_2$ et $\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 \ [2\pi]$
   b) On donne la forme exponentielle de deux nombres complexes :
   $z_1 = 3\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = 2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$
   Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :
   $z_1 z_2$, z_1^2 et $\dfrac{z_1}{z_2}$

EXERCICE 2

Transformation dans le plan **(3 points)**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z différent de i associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{z - 1 + 2i}{z - i}$$

1) Calculer l'affixe a' du point A' image du point A d'affixe $a = 1 + 3i$ par f.
2) Déterminer l'affixe du point B qui a pour image par f, le point B' d'affixe $b' = 3i$.

EXERCICE 3

Vrai-Faux **(3 points)**

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) **Affirmation 1 :**
   Le point d'affixe $(-1 + i)^{10}$ est situé sur l'axe imaginaire.
2) **Affirmation 2 :**
   Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation : $z - \bar{z} + 2 - 4i = 0$ admet une solution unique.

EXERCICE 4

BAC 2014 **(10 points)**

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. L'unité sur la feuille annexe à rendre avec la copie est de 2 cm sur chaque axe.
Le graphique sur la feuille annexe sera complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe $f(z) = z^2 + 2z + 9$

1) Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par la fonction f.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.
   Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.
   Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont les affixes sont solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
   On laissera les traits de construction apparents.
3) Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.
   Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.
4) Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie : $|f(z) - 8| = 3$
   Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\,;\,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
   Construire (F) sur le graphique. On indiquera comment tracer ce cercle.
5) Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.
   a) Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est
   $$x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y)$$
   b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
   Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
   Compléter le graphique de l'annexe en traçant ces droites.
6) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

Annexe de l'exercice 4

(à rendre avec la copie)

Nom :

Prénom :