Contrôle de mathématiques

Lundi 23 novembre 2015

EXERCICE 1

Limites **(3 points)**

On justifiera avec soin les limites demandés

1) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-5x+4}{x-2}$

2) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{x-5}{(x-2)^2}$

3) Déterminer $\displaystyle\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} \sqrt{\frac{3}{2-x}}$

EXERCICE 2

Continuité et dérivabilité **(5 points)**

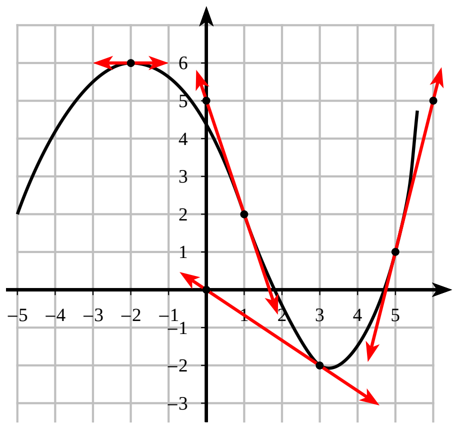
1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x\cos\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Rappeler la définition de la continuité en a d'une fonction f.
En encadrant la fonction f, montrer que la fonction f est continue en 0.

2) Vrai-faux : La proposition suivante est-elle vraie ou fausse. Justifier
« Si une fonction est continue en a, alors la fonction est dérivable en a »

3) À l'aide de la représentation graphique ci-contre de la fonction f, recopier et compléter le tableau suivant :

x	-2	1	3	5
$f(x)$				
$f'(x)$				



EXERCICE 3

Étude d'une fonction **(9 points)**

1) Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x - 1$

a) Déterminer u', la fonction dérivée de u, puis dresser le tableau de variation de la fonction u. On donne $u\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{19}{27}$.
(On ne demande pas de calculer les limites en l'infini.)

b) Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $1 < \alpha < 2$.

c) À l'aide de l'algorithme de dichotomie, déterminer un encadrement à 10^{-4} de α. On donnera le nombre de boucles nécessaires à cet encadrement.

d) En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

2) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x-1}$

a) Déterminer les limites de f en $+\infty$, $-\infty$ et 1.

b) Déterminer f' la fonction dérivée de f et montrer que : $f'(x) = \dfrac{u(x)}{(x-1)^2}$

c) Déterminer le signe de f' sur $\mathbb{R} - \{1\}$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f. On donne $f(\alpha) \approx 4,219$

d) On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β sur $\mathbb{R} - \{1\}$. Donner un encadrement à 10^{-2} de β.

e) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x^2$.
Pourquoi peut-on dire que la parabole d'équation $y = x^2$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$?

On donne l'algorithme ci-contre. Que calcule cet algorithme ? Qu'affiche-t-il comme résultat ?

Variables : X : entier
Entrées et initialisation
| X prend la valeur 2
Traitement
tant que $\dfrac{1}{X-1} \geqslant 10^{-3}$ **faire**
| X prend la valeur $X + 1$
fin
Sorties : Afficher X

Exercice 4

Fonctions dérivées **(3 points)**

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes en précisant le domaine de validité.

1) $f(x) = x + 7 + \dfrac{2}{2x+3}$ on factorisera la dérivée.

2) $f(x) = (3x^2 - x + 1)^4$

3) $f(x) = x\sqrt{3x+1}$ on donnera la forme la plus simple.