Contrôle de mathématiques

Lundi 01 février 2016

Exercice 1

ROC et applications **(5 points)**

1) On pose : $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$,
   avec r_1, θ_1 et r_2, θ_2 les modules et arguments respectifs de z_1 et z_2.
   On rappelle que :
   $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

   Démontrer que pour tous nombres complexes non nul z_1 et z_2 que :
   $|z_1z_2| = |z_1| \times |z_2|$ et $\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]$

2) **Applications :**

   a) Déterminer la forme algébrique de : $z = \dfrac{5+2i}{1-i}$

   b) Développer $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2$.
   En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^2 = 4i$

   c) Calculer le module et un argument de : $z = -\sqrt{3} + i$.
   En déduire que : $(-\sqrt{3} + i)^6 = -64$

Exercice 2

Équation du 3e degré **(6 points)**

On pose pour tout nombre complexe z, $f(z) = z^3 - (4\sqrt{3} + i)z^2 + 4(4 + i\sqrt{3})z - 16i$.

1) Montrer que $f(i) = 0$.
   Que peut-on en déduire pour $f(z)$? (On citera le théorème utilisé)

2) a) Montrer que : $f(z) = (z-i)(z^2 - 4\sqrt{3}z + 16)$

   b) En déduire les 3 solutions de l'équation $f(z) = 0$.

3) a) Déterminer la forme exponentielle des trois solutions de l'équation $f(z) = 0$

   b) Représenter, au compas et à la règle non graduée, les trois points, A, B, C dont les affixes sont les solutions de $f(z) = 0$ sur **l'annexe 1** (on laissera les traits de construction).

Exercice 3

BAC **(9 points)**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln x$.

Pour tout réel a strictement positif, on définit sur $]0\,;+\infty[$ la fonction g_a par $g_a(x) = ax^2$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f et Γ_a celle de la fonction g_a dans un repère du plan. Le but de l'exercice est d'étudier l'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a suivant les valeurs du réel strictement positif a.

Partie A

On a construit en **annexe 2** (*à rendre avec la copie*) les courbes $\mathscr{C}$, $\Gamma_{0,05}$, $\Gamma_{0,1}$, $\Gamma_{0,19}$ et $\Gamma_{0,4}$.

1) Nommer les différentes courbes sur le graphique. Aucune justification n'est demandée.
2) Utiliser le graphique pour émettre une conjecture sur le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ_a suivant les valeurs (à préciser) du réel a.

Partie B

Pour un réel a strictement positif, on considère la fonction h_a définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $h_a(x) = \ln x - ax^2$.

1) Justifier que x est l'abscisse d'un point M appartenant à l'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ_a si et seulement si $h_a(x) = 0$.
2) a) On admet que la fonction h_a est dérivable sur $]0\,;\,\infty[$, et on note h'_a la dérivée de la fonction h_a sur cet intervalle.

   Le tableau de variation de la fonction h_a est donné ci-dessous.

   Justifier, par le calcul, le signe de $h'_a(x)$ pour x appartenant à $]0\,;+\infty[$ ainsi que les coordonnées de l'extremum de h_a.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2a}}$		$+\infty$
$h'_a(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$h_a(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{-1-\ln(2a)}{2}$	↘	

   b) Rappeler la limite de $\dfrac{\ln x}{x}$ en $+\infty$. En déduire la limite de la fonction h_a en $+\infty$.

   On ne demande pas de justifier la limite de h_a en 0.
3) Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = 0,1$.

   a) Justifier que, dans l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$, l'équation $h_{0,1}(x) = 0$ admet une unique solution α.

   On admet que cette équation a aussi une seule solution β dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{\sqrt{0,2}}\,;\,+\infty\right[$.

   b) Donner un encadrement de α et β à 10^{-2} près.

   c) Quel est le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{0,1}$?
4) Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = \dfrac{1}{2e}$.

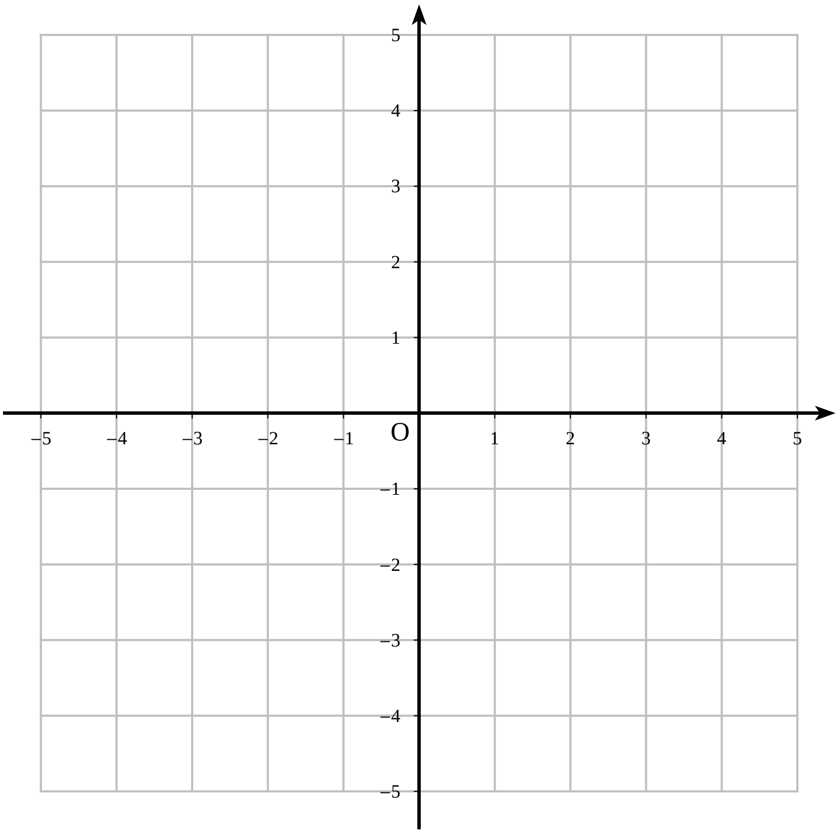
   a) Déterminer la valeur du maximum de $h_{\frac{1}{2e}}$.

   b) En déduire le nombre de points d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{\frac{1}{2e}}$. Justifier.
5) Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles $\mathscr{C}$ et Γ_a n'ont aucun point d'intersection ? Justifier.

Nom :
Prénom :

Annexe 1

(à rendre avec la copie)



Annexe 2

(à rendre avec la copie)