Contrôle de mathématiques

Jeudi 31 mars 2016

EXERCICE 1

Primitive et intégrale **(5 points)**

1) Déterminer une primitive pour les fonctions suivantes sur l'intervalle I proposé. On indiquera clairement la forme utilisée pour déterminer la primitive.

   a) $f(x) = 4x + 3 + \dfrac{2}{2x-1}$, $\mathrm{I} = \left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$

   b) $g(x) = x\,e^{-x^2+2}$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

   c) $h(x) = \dfrac{4}{3x+6}$, $\mathrm{I} =]-2\,;+\infty[$

2) a) Déterminer la primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$

   b) En déduire la valeur de l'intégrale : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^2 \frac{3x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

EXERCICE 2

Suite et intégrale **(5 points)**

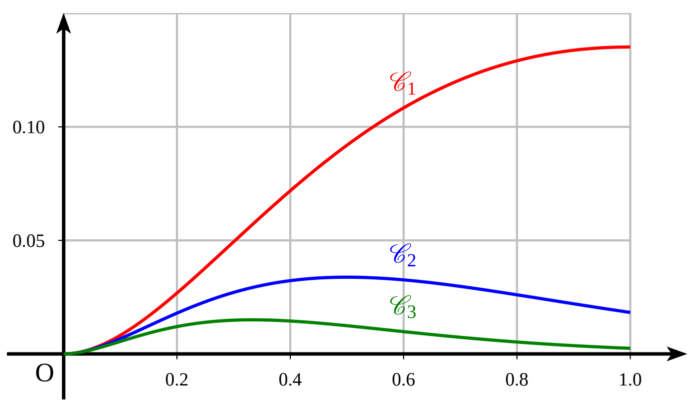
Soit n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f_n(x) = x^2 \mathrm{e}^{-2nx}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

On définit, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

On a représenté ci-dessous les fonctions f_1, f_2 et f_3.



1) a) Interpréter graphiquement la quantité I_n.

   b) Émettre alors une conjecture sur le sens de variation et sur la limite éventuelle de la suite (I_n). Expliciter la démarche qui a mené à cette conjecture.

2) a) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0\,;1]$,
$$f_{n+1}(x) = \mathrm{e}^{-2x} f_n(x).$$

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0\,;1]$,
$$f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x).$$

c) Déterminer alors le sens de variation de la suite (I_n).

3) a) Justifier que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0\,;1]$,
$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-2nx}.$$

b) En déduire un encadrement de la suite (I_n), puis sa limite.

Exercice 3

Jus de fruit **(5 points)**

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle $[0\,;1]$.
Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».
On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les événements suivants :
R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;
J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A

1) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2) Déterminer la valeur exacte de x.

3) Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.
On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1) Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. On se justifiera et on donnera les paramètres de cette loi.

2) Déterminer la probabilité pour qu'au moins 80 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.

EXERCICE 4

Le chikungunya **(5 points)**

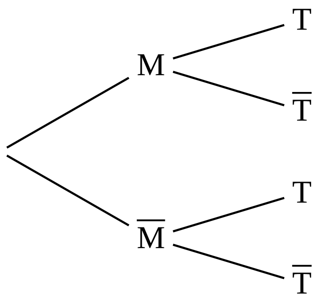
Le chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles infectées.

Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :
- la probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de $0,98$;
- la probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de $0,01$.

On procède à un test de dépistage systématique dans une population « cible ». Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :
- M l'événement : L'individu choisi est atteint du chikungunya
- T l'événement : Le test de l'individu choisi est positif

On note p $(0 \leqslant p \leqslant 1)$ la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible.

1) a) Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



b) Exprimer $P(\text{M} \cap \text{T})$, $P\left(\overline{\text{M}} \cap \text{T}\right)$ puis $P(\text{T})$ en fonction de p.

2) a) Démontrer que la probabilité de M sachant T est donnée par la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f(p) = \frac{98p}{97p+1}.$$

b) Étudier les variations de la fonction f.

3) On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à $0,95$.

En utilisant les résultats de la question **2)**, à partir de quelle proportion p de malades dans la population le test est-il fiable ?