BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 7

Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

EXERCICE 1 (5 points)

On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$

$$\begin{cases} d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{cases}$$

1) Calculer d_1 et a_1.
2) On souhaite écrire un algorithme qui permet d'afficher en sortie les valeurs de d_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.
   L'algorithme suivant est proposé :

Variables : n, k : entiers naturels
D, A : réels
Entrées et initialisation
  Saisir la valeur de n
  D prend la valeur 300
  A prend la valeur 450
Traitement
  pour k variant de 1 à n **faire**
    D prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$
    A prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{D}{2} + 70$
  fin
Sorties : Afficher D et A

   a) Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour $n = 1$?
      Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question 1) ?
   b) Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.
3) a) Pour tout entier naturel n, on pose $e_n = d_n - 200$.
      Montrer que la suite (e_n) est géométrique.
   b) En déduire l'expression de d_n en fonction de n.
   c) La suite (d_n) est-elle convergente ? Justifier.
4) On admet que pour tout entier naturel n, $a_n = 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340$.
   a) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a : $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.
   b) Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $2^n \geqslant n^2$.
   c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 \leqslant 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100}{n}$.
   d) Étudier la convergence de la suite (a_n).

EXERCICE 2 (5 points)

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

On donne le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : Propriétés du nombre j

1) a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

   b) Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.

2) Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.

3) Démontrer les égalités suivantes :

   a) $j^3 = 1$;

   b) $j^2 = -1 - j$.

4) On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.
Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + jb + j^2c = 0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1) En utilisant la question A - 3) b), démontrer l'égalité : $a - c = j(c - b)$.
2) En déduire que AC = BC .
3) Démontrer l'égalité : $a - b = j^2(b - c)$.
4) En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 3 (5 points)

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = 1 + x - x\ln x$

1) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$
2) a) Déterminer la fonction dérivée g' puis étudier son signe sur $]0\,;+\infty[$.

   b) Dresser le tableau de variation de la fonction g sur $]0\,;+\infty[$.
3) a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;+\infty[$

   b) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

   c) Déterminer le signe de g sur $]0\,;+\infty[$

Partie B : Étude de la fonction principale

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x}$

On admet que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

a) Calculer $f'(x)$ puis montrer que : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(1+x)^2}$.

b) Montrer que f' a le même signe que g sur $]0\,;+\infty[$

c) Dresser le tableau de variation de f sur $]0\,;+\infty[$

d) Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$ puis déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}

EXERCICE 4 (5 points)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan.

Partie A : Étude et représentation de la fonction *f*

1) Calculer la limite de f en $+\infty$.
2) Calculer $f'(x)$ puis étudier son signe sur $[0\,;+\infty[$
3) Dresser le tableau de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.
4) Calculer la tangente (Δ) à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
5) Sur l'annexe, à rendre avec la copie, tracer soigneusement $\mathscr{C}_f$ et (Δ) en faisant figurer la tangente horizontale.

Partie B : Algorithme

On considère l'algorithme suivant :

Variables : K, I : entiers naturels
A, X, P : réels
Entrées et initialisation
Lire K
$0 \to A$
$0 \to X$
$\dfrac{1}{K} \to P$
Traitement
pour I de 1 à K **faire**
$A + P \times \dfrac{X}{e^X - X} \to A$
$X + P \to X$
fin
Sorties : Afficher A

1) Reproduire et compléter le tableau suivant (valeurs en fin de boucle), en faisant fonctionner cet algorithme pour $K = 4$. Les valeurs successives de A seront arrondies au millième.

I	A	X
1		
2		
3		
4		

2) Qu'affiche cet algorithme pour $K = 8$?

3) Quelle est l'interprétation géométrique du résultat de cet algorithme lorsque K devient grand ?

Nom :

Prénom :

Annexe de l'exercice 4
(À rendre avec la copie)