Devoir à rendre pour le mardi 3 janvier 2017

Exercice I

Équations et inéquation **(8 points)**

1) Résoudre les équations suivantes en ayant soin de déterminer l'ensemble sur lequel votre calcul est valable. On visualisera cet ensemble sur une droite orientée.

   a) $\ln(x) + \ln(x-1) = \ln(6)$ b) $\ln(3x) + \ln(2-x) = \ln(2)$

2) Changement de variable.

   a) Résoudre l'équation : $X^2 - 2X - 15 = 0$

   b) En déduire les solutions des équations suivantes :

   α) $e^{2x} - 2e^x - 15 = 0$ β) $(\ln x)^2 - 2\ln x - 15 = 0$

3) Résoudre les inéquations suivantes en ayant soin de déterminer l'ensemble sur lequel votre calcul est valable. On visualisera l'ensemble solution sur une droite orientée.

   a) $\ln x + \ln(2x+5) \leqslant \ln 3$ b) $\ln(x^2 - x - 2) > 2\ln(3-x)$

4) On cherche le plus petit entier n tel que : $1 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^n > 0,999$

   a) Résoudre cette inéquation algébriquement.

   b) Proposer une vérification algorithmique de votre résultat.

Exercice II

Dérivées et variation **(4 points)**

1) Calculer les dérivées des fonctions suivantes en indiquant leur domaine de validité :

   a) $f(x) = 2x + \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

   b) $g(x) = \dfrac{x + \ln x}{x^2}$

2) Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = (\ln x)^2 - 6\ln x + 5$

   a) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f

   b) En déduire les variations de f sur $]0\,;+\infty[$
   (On ne demande pas de calculer les limites en 0 et $+\infty$.)

Exercice III

Limites **(3 points)**

Calculer les limites suivantes en vous justifiant soigneusement :

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x + 1}{2x}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ on pourra faire un changement de variable.

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln(e^x - 1)$

Exercice IV

Étude d'une fonction **(5 points)**

Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = 1 + x - x\ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1) Montrer que la fonction f est continue en 0.
   On admet, par contre, que la fonction f n'est pas dérivable en 0.

2) Calculer la limite de f en $+\infty$

3) a) Déterminer la fonction dérivée sur $]0\,;+\infty[$.
   b) En déduire le tableau de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.

4) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$
   b) Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} par l'algorithme de dichotomie. On donnera le nombre de boucles nécessaire à cet encadrement. On pourra calculer $f(4)$.