Contrôle de mathématiques

Jeudi 26 janvier 2017

EXERCICE 1

Triangle **(6 points)**

On donne les points A$(2+i)$, B$(6+3i)$ et C$(-1+7i)$.

1) Placer les points A, B et C dans le plan complexe $(\text{O}, \vec{u}, \vec{v})$ sur l'annexe.
2) a) Déterminer la forme algébrique du complexe $\dfrac{z_\text{C}-z_\text{A}}{z_\text{B}-z_\text{A}}$
   b) En déduire que le triangle ABC est rectangle.
3) a) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tel que : $|z-2-i| = |z-6-3i|$. Représenter (Δ) sur l'annexe.
   b) On donne le point E$\left(\dfrac{5}{2}+5i\right)$. Montrer que le point E est le milieu de [BC].
4) a) Calculer la longueur EB.
   b) Déterminer l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points M d'affixe z tel que : $|z-z_\text{E}| = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$. Représenter $(\mathscr{C})$ sur l'annexe.
   c) Pourquoi les points A, B et C appartiennent à $(\mathscr{C})$?

EXERCICE 2

Fonction complexe **(3 points)**

Soit z un nombre complexe différent de 2. On pose $f(z) = \dfrac{iz}{z-2}$ et A(2)

1) Montrer que l'ensemble (E) des points du plan complexe $(\text{O}, \vec{u}, \vec{v})$ d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$ est une droite parallèle à l'axe des imaginaires purs.
2) Montrer que $f(z)$ est un imaginaire pur si, et seulement si, z est réel.

EXERCICE 3

Forme exponentielle **(3 points)**

1) a) Déterminer le module et un argument de $z = -\sqrt{3}+i$. En déduire la forme exponentielle de z.
   b) Donner la forme exponentielle de $z^4 = (-\sqrt{3}+i)^4$ puis sa forme algébrique.
2) Résoudre l'équation (E) d'inconnue complexe z : $z^2-8z+25=0$

EXERCICE 4

Bac **(8 points)**

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n.$$

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ de l'annexe.
L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n.

1) a) Vérifier que $1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}}$.

   b) En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $z_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$.

   b) Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

3) Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.

   a) Interpréter géométriquement d_n.

   b) Calculer d_0.

   c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)$.

   d) En déduire que la suite (d_n) est géométrique puis que pour tout entier naturel n,

$$d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n.$$

4) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2$.

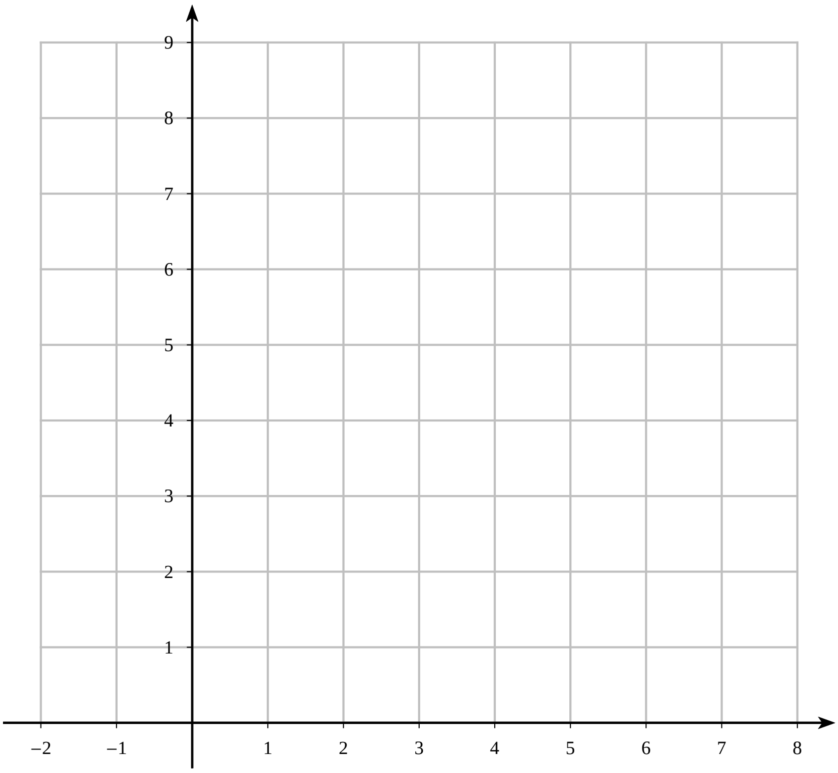
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.

   c) Construire, à la règle non graduée et au compas, le point A_5 sur la figure de l'annexe à rendre avec la copie.

   d) Justifier cette construction.

Nom :
Prénom :

Annexe exercice 1
(à rendre avec la copie)



Annexe exercice 4
(à rendre avec la copie)