

BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 7

- Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité.
- La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- ▶ le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.
- ▶ **votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.

EXERCICE 1**(5 points)**

Les trois parties sont indépendantes.

Partie 1 Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} près.

On estime qu'en 2013 la population mondiale est composée de 4,6 milliards de personnes âgées de 20 à 79 ans et que 46,1 % des personnes âgées de 20 à 79 ans vivent en zone rurale et 53,9 % en zone urbaine.

En 2013, d'après la fédération internationale du diabète, 9,9 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone urbaine est atteinte de diabète et 6,4 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone rurale est atteinte de diabète.

On interroge au hasard une personne âgée de 20 à 79 ans. On note :

R l'événement : « la personne choisie habite en zone rurale »,

D l'événement : « la personne choisie est atteinte de diabète ».

- 1) Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.
- 2) a) Calculer la probabilité que la personne interrogée soit diabétique.
b) La personne choisie est diabétique. Quelle est la probabilité qu'elle habite en zone rurale ?

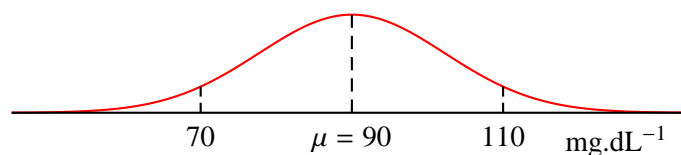
Partie 2 Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} près.

Une personne est dite en hypoglycémie si sa glycémie à jeun est inférieure à 60 mg.dL^{-1} et elle est en hyperglycémie si sa glycémie à jeun est supérieure à 110 mg.dL^{-1} . La glycémie à jeun est considérée comme « normale » si elle est comprise entre 70 mg.dL^{-1} et 110 mg.dL^{-1} . Les personnes ayant un taux de glycémie compris entre 60 et 70 mg.dL^{-1} ne font pas l'objet d'un suivi particulier.

On choisit au hasard un adulte dans cette population. Une étude a permis d'établir que la probabilité qu'il soit en hyperglycémie est $0,052$ à 10^{-3} près. Dans la suite on admettra que cette probabilité est égale à $0,052$.

On modélise la glycémie à jeun, exprimée en mg.dL^{-1} , d'un adulte d'une population donnée, par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ .

On donne ci-dessous la représentation graphique de la densité de probabilité de la variable aléatoire X .



- 1) Quelle est la probabilité que la personne choisie ait une glycémie à jeun « normale » ?
- 2) Déterminer la valeur de σ arrondie au dixième.
- 3) Dans cette question, on prend $\sigma = 12$. Calculer la probabilité que la personne choisie soit en hypoglycémie.

Partie 3 Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-4} près.

La durée de vie en heures d'une ampoule est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle d'espérance $10\,000$.

- 1) Déterminer la valeur exacte du paramètre λ de cette loi.
- 2) Calculer la probabilité $P(T \geq 5\,000)$.
- 3) Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant $7\,000$ heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse $12\,000$ heures.

EXERCICE 2**(5 points)**

On souhaite stériliser une boîte de conserve.

Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25^\circ\text{C}$ et on la place dans un four à température constante $T_F = 100^\circ\text{C}$.

La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85°C .

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A : Modélisation discrète

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes. On a donc $T_0 = 25$.

Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

- 1) Rentrer cet algorithme dans votre calculatrice puis donner la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes puis de 5 minutes. Arrondir à l'unité.
- 2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.
- 3) Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-elle ?

Variables : n, i : entiers T : réel
Entrées et initialisation
 | T prend la valeur 25
 | Demander la valeur de n
Traitement
 | **pour** i allant de 1 à n **faire**
 | | T prend la valeur $0,85 \times T + 15$
 | **fin**
Sorties : Afficher : T

Partie B : Modélisation continue

Dans cette partie, t désigne un réel positif.

On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec :

$$f(t) = 100 - 75 e^{-\frac{\ln 5}{10}t}.$$

- 1) a) Étudier le sens de variations de f sur $[0 ; +\infty[$.

b) Justifier que si $t \geq 10$ alors $f(t) \geq 85$.

- 2) Soit θ un réel supérieur ou égal à 10.

On note $\mathcal{A}(\theta)$ le domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = \theta$, $y = 85$ et la courbe représentative \mathcal{C}_f de f . Ainsi $\mathcal{A}(\theta) = \int_{10}^{\theta} [f(t) - 85] dt$

On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ , si l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine $\mathcal{A}(\theta)$ est supérieure à 80. .

- a) Justifier, à l'aide du graphique donné en annexe, que l'on a $\mathcal{A}(25) > 80$. (On pourra raisonner à l'aide des rectangles tracés sur l'annexe)
- b) Trouver une primitive de la fonction g définie par : $g(t) = f(t) - 85$.
- c) Calculer $\mathcal{A}(20)$. La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

EXERCICE 3**(5 points)**

- 1) Déterminer la forme exponentielle $a = \sqrt{3} - 3i$

- 2) On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n \geq 0$ par la donnée de z_0 , où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence : $z_{n+1} = 1 - \frac{1}{z_n}$.

a) Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$. Déterminer les nombres z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6 .

- b) Dans cette question, on suppose que $z_0 = i$. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6 .
- c) Dans cette question on revient au cas général où z_0 est un complexe donné. Que peut-on conjecturer, au vu des questions précédentes, pour les valeurs prises par $z_{3n}, n \in \mathbb{N}$?
Prouver cette conjecture par récurrence.
- d) Déterminer z_{2016} dans le cas où $z_0 = 1 + i$.
- e) Existe-t-il des valeurs de z_0 tel que $z_0 = z_1$? Que peut-on dire de la suite (z_n) dans ce cas?

EXERCICE 4**(5 points)****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2 + 2 \ln x}{x}$

- 1) a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
 - b) Déterminer $f'(x)$. En déduire que $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.
 - c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
- 2) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0; 1]$.
Donner un encadrement à 10^{-3} de la valeur de α .
- 3) Déterminer une primitive F de la fonction f .

On pourra remarquer que $f(x)$ peut s'écrire $\frac{2}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$.

Calculer alors $\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx$

Annexe exercice 2

