

Contrôle de mathématiques

Mardi 20 septembre 2016

EXERCICE 1

Variation d'une suite

(2 points)

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_n = \frac{3n+2}{n+4}$

- 1) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{10}{(n+4)(n+5)}$
- 2) En déduite la monotonie de la suite (u_n)

EXERCICE 2

Algorithme

(4 points)

Soit la suite définie pour $n \geq 1$ par : $u_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

- 1) a) Calculer les termes u_1, u_2, u_3 et u_4 . On donnera les valeurs sous forme de fraction.
 b) Quelle conjecture peut-on faire en ce qui concerne l'expression de u_n en fonction de n ?

- 2) Compléter les pointillés de l'algorithme ci-contre de façon à ce qu'il donne la valeur de u_n , n étant donné.
- 3) Rentrer cet algorithme dans votre calculatrice puis remplir le tableau suivant en donnant les valeurs à 10^{-3} près :

N	5	10	20	50	100
U					

Variables : N, I entiers
 U réel

Entrées et initialisation
 | Lire N
 | $0 \rightarrow U$

Traitement
 | **pour** I variant de ... à N **faire**
 | | $U + \dots \rightarrow U$
 | **fin**

Sorties : Afficher ...

- 4) Quelle conjecture peut-on faire en ce qui concerne la monotonie de la suite et de sa limite ?

EXERCICE 3

ROC et suite géométrique

(4 points)

- 1) Montrer que pour $q \neq 1$ on a : $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
- 2) Soit la suite (u_n) géométrique définie sur \mathbb{N} telle que : $u_2 = 96$ et $u_4 = 61,44$
 - a) Déterminer la raison q avec $q > 0$, et le premier terme u_0 de la suite (u_n) .
 - b) Calculer la somme : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$.
 On donnera la valeur exacte puis la valeur approchée à 10^{-3} près.

EXERCICE 4

Production de bactéries

(5 points)

Une société produit des bactéries pour l'industrie.

En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.

La société met en place le dispositif industriel suivant.

Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.

L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$$u_0 = 1\,000 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 1,2u_n - 100.$$

1) a) Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé.

On précisera en particulier ce que représente u_n .

b) L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

c) On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente.

Recopier et compléter cet algorithme.

Variables : N entier et U réel
Entrées et initialisation
 | U prend la valeur 1000
 | N prend la valeur 0
Traitement
 | **tant que** **faire**
 | | U prend la valeur
 | | N prend la valeur $N + 1$
 | **fin**
Sorties : Afficher

2) On admet que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1\,000$.

Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

3) On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 500$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

b) Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .

c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 5

Suite récurrente à deux termes

(5 points)

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$

1) Calculer u_2 , u_3 et u_4 .

2) Écrire un algorithme qui permette de calculer u_n , $n \geq 2$ étant donné.

3) a) Rentrer cet algorithme sur votre calculatrice et remplir le tableau suivant :

n	5	10	20
u_n			

b) Quelle conjecture peut-on faire en ce qui concerne les variations et la limite de la suite (u_n) ?

4) On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. En déduire l'expression de v_n en fonction de n .

5) On admet que $u_n = \frac{3^n - 1}{2}$. Retrouver la conjecture faite à la question 3b).