Devoir à rendre pour le lundi 8 janvier 2018

EXERCICE I

Équations et inéquation **(8 points)**

1) Résoudre les équations suivantes en ayant soin de déterminer l'ensemble sur lequel votre calcul est valable. On visualisera cet ensemble sur une droite orientée.

   a) $\ln(2x+1)+\ln(x-3)=\ln(x+5)$ b) $\ln(x^2+5x+6)=\ln(x+11)$

2) Changement de variable.

   a) Résoudre l'équation : $5X^2-13X-6=0$

   b) En déduire les solutions des équations suivantes :

   α) $5e^{2x}-13e^{x}-6=0$ β) $5(\ln x)^2-13\ln x-6=0$

3) Résoudre les inéquations suivantes en ayant soin de déterminer l'ensemble sur lequel votre calcul est valable. On visualisera l'ensemble solution sur une droite orientée.

   a) $\ln\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)\leqslant 0$ b) $\ln(x+3)\leqslant 1+\ln(1-x)$

4) On cherche le plus petit entier n tel que : $1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n\geqslant 0,95$

   a) Résoudre cette inéquation algébriquement.

   b) Proposer une vérification algorithmique de votre résultat.

EXERCICE II

Résolution d'une équation **(6 points)**

1) Soit la fonction f définie sur $]0\ :+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

   a) Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction f.

   b) Calculer la dérivée f' de la fonction f.

   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2) On veut résoudre l'équation (E) $\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{1}{n}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$

   a) Montrer que si $n<3$, l'équation (E) n'a pas de solution.

   b) Montrer que si $n\geqslant 3$ alors l'équation (E) admet exactement deux solutions α_n et β_n avec $1<\alpha_n<e<\beta_n$

   c) Déterminer un encadrement à 10^{-3} de α_5 et β_5.

Exercice III

Fonction et algorithme **(6 points)**

Soit la fonction f définie sur $\mathrm{I} = [-2,5\ ;\ 2.5]$ par : $f(x) = \ln(-2x^2 + 13,5)$

1) Montrer que : $\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \geqslant 0$

2) Déterminer la parité de la fonction f sur I. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}_f$.

3) Déterminer la dérivée f' puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur I. Retrouver alors le résultat de la question 1).

4) La courbe $\mathscr{C}_f$ est-elle un arc de cercle de centre 0 ? Justifier la réponse.

5) On donne l'algorithme suivant :

Variables : R, S : réels n, k entier
Entrées et initialisation
  Lire n
  $0 \rightarrow S$
Traitement
  pour k de 1 à n **faire**
    $\dfrac{2,5}{n} \times f\left(\dfrac{2,5}{n} \times k\right) \rightarrow R$
    $S + R \rightarrow S$
  fin
Sorties : Afficher S

a) Quelle est la valeur de sortie si l'on rentre $n = 50$

b) Que semble calculer cet algorithme ? On pourra éventuellement s'aider de la courbe $\mathscr{C}_f$ pour expliquer ce que calcule cet algorithme.