Contrôle de mathématiques

Mercredi 07 février 2018

Exercice 1

Géométrie **(4 points)**

1) Soit les points A et B d'affixes respectives 4 et $-2i$.
   On appelle δ l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|z-4| = |z+2i|$
   a) Montrer que l'ensemble δ est une droite que l'on déterminera.
   b) Montrer que la droite δ passe par le point C d'affixe $3i$.
2) Soit l'équation (E) : $(z-1)(z^2+6z+25) = 0$ où $z \in \mathbb{C}$.
   a) Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.
   b) Montrer que les points A, B, C dont les affixes sont les solutions de (E) sont les sommets d'un triangle isocèle rectangle.

Exercice 2

Fonction complexe **(6 points)**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = -z^2 + 2z$.
Le point M' est appelé image du point M.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$.
   En déduire les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2.
2) Soit M un point d'affixe z et M' son image d'affixe z'.
   On note N le point d'affixe $z_N = z^2$.
   Montrer que M est le milieu du segment [NM'].
3) Dans cette question, on suppose que le point M ayant pour affixe z, appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1. On note θ un argument de z.
   a) Déterminer le module des nombres complexes z et z_N, ainsi qu'un argument de z_N en fonction de θ.
   b) Sur la figure donnée en annexe, à rendre avec la copie, on a représenté un point M sur le cercle $\mathscr{C}$.
      Construire sur cette figure les points N et M' en utilisant une règle et un compas (on laissera les traits de construction apparents).
   c) Soit A le point d'affixe 1. Quelle est la nature du triangle AMM' ?

Exercice 3

Forme exponentielle **(4 points)**

1) a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe : $-1+i$.

b) À quelle condition sur l'entier naturel n, le nombre $(-1+i)^{2n}$ est-il un nombre réel strictement positif ?

2) Est-il vrai qu'un argument de $(-\sqrt{3}+i)^8$ est égal à $\dfrac{\pi}{3}$?

EXERCICE 4

Divers **(6 points)**

1) **ROC** : Soit A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d. Démontrer que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) \quad [2\pi]$$

Application : On donne $A(1+i)$, $B(5+i)$, $C(1-\sqrt{3}+2i)$. Déterminer $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

2) Déterminer la forme algébrique et le module de : $z = \dfrac{(2-i)(5+2i)}{3-4i}$

3) Soit l'équation (E) : $z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$

a) Montrer que : $z^4 + 2z^3 - z - 2 = (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1)$

b) Résoudre alors l'équation (E).

c) Les solutions de l'équation (E) sont les affixes des points A, B, C, D du plan complexe tels que ABCD soit un quadrilatère non croisé.
Le quadrilatère ABCD est-il un losange ? Justifier.

Nom :

Prénom :

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 2