BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 7

Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

EXERCICE 1 (5 points)

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Partie A

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,3 \\ u_{n+1} = 0,9u_n(1-u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n : u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000 + n$.

1) Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.
2) On admet que, pour tout entier naturel n : u_n et $1-u_n$ appartiennent à l'intervalle $[0\,;1]$.
   a) Montrer que, pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,9u_n$.
   b) Montrer par récurrence, que, pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$.
   c) Déterminer la limite de la suite (u_n). Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?
3) Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.
   On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année **avant** laquelle il reste au moins 30 tortues.
   Recopier et compléter l'algorithme afin qu'il satisfasse cette exigence.

```
Variables : N : entier naturel    U : réel
Entrées et initialisation
    U prend la valeur 0,3
    N prend la valeur 0
Traitement
    tant que ...... faire
        ........
        ........
    fin
Sorties : Afficher ......
```

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_{10} = 0,032 \\ v_{n+1} = 1,06v_n(1-v_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel $n \geqslant 10$: v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000 + n$.

1) Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.
2) On admet que, dans ce modèle, la suite (v_n) est croissante et convergente. On appelle ℓ sa limite. Montrer que ℓ vérifie : $\ell = 1,06\ell(1-\ell)$.
3) La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction ?

EXERCICE 2 (5 points)

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x - 2 - \dfrac{2 + 3\ln x}{x}$.

1) Soit φ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $\varphi(x) = x^2 - 1 + 3\ln x$.

   a) Calculer $\varphi(1)$ et la limite de φ en 0.

   b) Étudier les variations de φ sur $]0\,;\,+\infty[$.
   En déduire le signe de $\varphi(x)$ selon les valeurs de x.

2) a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   b) Montrer que sur $]0\,;\,+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$.

   c) En déduire le tableau de variation de f.

   d) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0;\,1]$ et une unique solution β sur $[1\,;+\infty[$
   Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de α et β à 10^{-2} près.

   e) Soit F la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x - 2\ln x - \dfrac{3}{2}(\ln x)^2$
   Montrer que F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 3 (5 points)

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justi ?er la réponse choisie. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justi ?ée. Une réponse non justi ?ée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1) Soit $a \in \mathbb{R}$ et (E) l'équation d'inconnue complexe z : $z^2 + 2az + a^2 + 1 = 0$
   Proposition 1 : « Pour toute valeur de a réel, l'équation (E) admet deux solutions non réelles de même module. »

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 2 + i$, $z_B = 5 + 2i$ et $z_C = 1 + 4i$.
   Proposition 2 : « Le triangle ABC est rectangle isocèle. »

3) Soit θ un nombre réel dans l'intervalle $]0;\pi[$ et z le nombre complexe : $z = 1 + e^{i\theta}$.
   Proposition 3 : « Un argument de z est θ »

4) Soit le nombre complexe $z = -\sqrt{3} + 3i$
   Proposition 4 : « Un argument de z est $\dfrac{5\pi}{6}$ »

5) Soit le nombre complexe $z = 1 + i$ et n un entier naturel.
   Proposition 5 : « Le nombre complexe z^n est un imaginaire pur si et seulement si $(n - 2)$ est un multiple de 4. »

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale. Un modèle très simplifié permet d'établir que la vitesse instantanée verticale, exprimée en m.s^{-1}, de chute de la goutte en fonction de la durée de chute t est donnée par la fonction v définie ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

la constante m est la masse de la goutte en milligramme, g l'accélération de la pesanteur en m.s^{-2} et la constante k est un coefficient strictement positif lié au frottement de l'air.

On rappelle que la vitesse instantanée est la dérivée de la position.
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A - Cas général

1) Déterminer les variations de la vitesse de la goutte d'eau.
2) La goutte ralentit-elle au cours de sa chute ?
3) Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = \dfrac{mg}{k}$. Cette limite s'appelle vitesse limite de la goutte.
4) Un scientifique affirme qu'au bout d'une durée de chute égale à $\dfrac{5m}{k}$, la vitesse de la goutte dépasse 99 % de sa vitesse limite. Cette affirmation est-elle correcte ?

Partie B

Dans cette partie, on prend $m = 6$, $g = 10$ et $k = 4$.
À un instant donné T, la vitesse instantanée de cette goutte est 14,85 m.s^{-1}.

1) Depuis combien de temps la goutte s'est -elle détachée de son nuage ?
   Soit T ce temps, arrondir T au dixième de seconde.
2) En déduire la vitesse moyenne de cette goutte entre le moment où elle s'est détachée du nuage et l'instant où on a mesuré sa vitesse. Arrondir la réponse au dixième de m.s^{-1}.

   On rappelle que la vitesse moyenne v_{moy} entre les instants $t = 0$ et $t = T$ vaut :

$$v_{\text{moy}} = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t$$