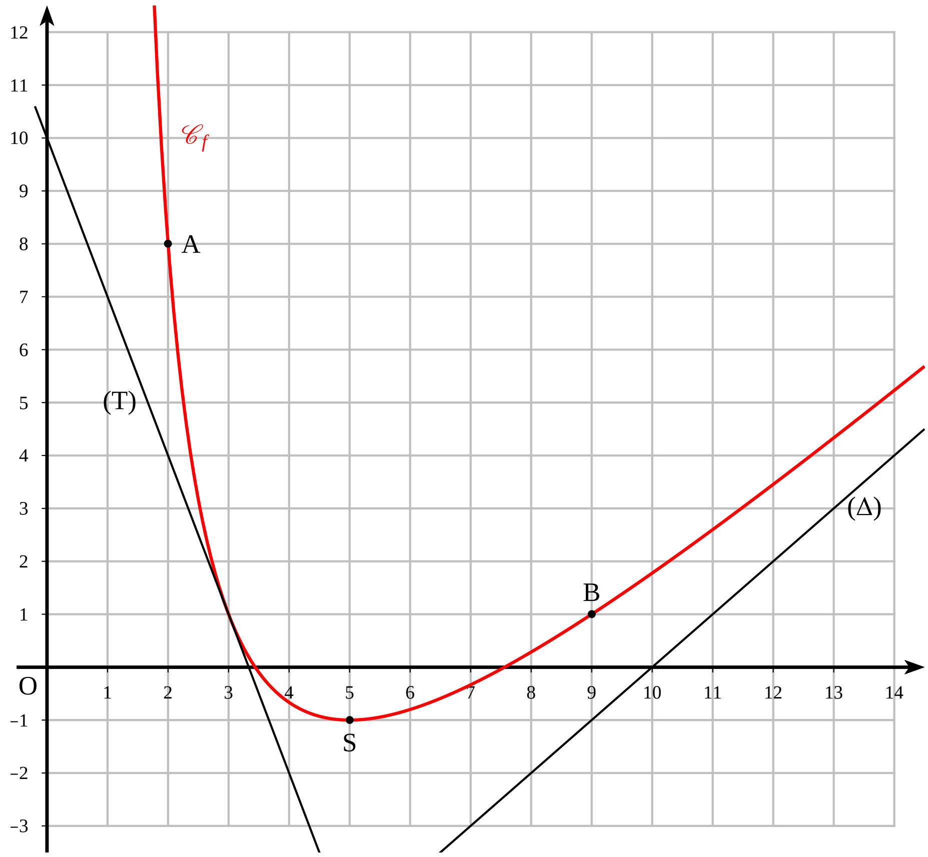
Devoir à rendre pour le lundi 05 novembre 2018

EXERCICE I

Déterminer une fonction à partir de sa représentation **(10 points)**

On donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $\text{I} =]1\,;+\infty[$.



Partie A : Lecture graphique

Déterminer les questions suivantes graphiquement

1) a) Lire les valeurs de $f(2)$, $f(3)$ et $f(9)$.
   b) Donner une valeur approchée des solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   c) Déterminer le signe de la fonction f sur I.
2) a) Que vaut $f'(5)$? Justifier.
   b) Donner une équation de la droite (T). Quel nombre dérivé peut-on en déduire ?
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur I.
      On précisera les limites en 1 et en $+\infty$.

Partie B : Expression de f et confirmation des résultats de la partie A

1) On sait que la fonction f est de la forme : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.
   a) Calculer la fonction dérivée f' en fonction de a et c.

b) La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points A(2,8) et B(9,1) et en S, d'abscisse 5, la tangente à $\mathscr{C}_f$ est horizontale. En déduire puis résoudre un système d'inconnues a, b, c. Donner alors l'expression de $f(x)$.

2) À l'aide de l'expression de $f(x)$:

a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x - 10)]$. Interpréter géométriquement ce résultat.

b) Déterminer l'expression de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3 et retrouver le résultat de la question 2b) de la partie A.

c) Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = 0$ et retrouver le résultat de la question 1b) de la partie A.

Exercice II

Vrai-Faux **(5 points)**

Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	1

Dire si les propositions suivantes sont vraie ou fausse en se justifiant.

1) **Proposition 1 :** L'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions.
2) **Proposition 2 :** $\forall a \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = a$ admet au moins deux solutions.
3) **Proposition 3 :** La courbe $\mathscr{C}_f$ admet deux asymptote horizontales.
4) **Proposition 4 :** L'équation $f'(x) = 0$ admet au moins une solution.
5) **Proposition 5 :** $f(-50) = 0$

Exercice III

Étude d'une fonction **(5 points)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\,;\,1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 1}$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1) Montrer que $\mathscr{C}_f$ coupe la droite $y = 1$ en un point que l'on précisera.
2) Montrer que le signe de la dérivée f' est donné par celui de $x^2 - x + 1$.
3) Déterminer les variations de la fonction f.
4) Calculer les limites en $+\infty$ et en 1.
5) Sans justification, donner les limites en $-\infty$ et -1 puis dresser le tableau de variation de la fonction f.
6) Montrer que $\mathscr{C}_f$ ne peut avoir de tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x$