Contrôle de mathématiques

Mercredi 05 décembre 2018

EXERCICE 1

Calcul de la constante *e* **(4 points)**

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant x+1$
   On pourra étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f telle que : $f(x) = e^x - (x+1)$
2) En déduire que pour tout entier naturel n, les deux inégalités suivantes :

   a) $e \geqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ b) $\dfrac{1}{e} \geqslant \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$

   c) En déduire alors l'encadrement : $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{-n}$
3) On prend $n = 1000$, donner un encadrement à 10^{-3} de e.

EXERCICE 2

Équation, inéquation **(2 points)**

On justifiera chaque étape des résolutions suivantes.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $e^{x^2-2} = e^{5x+4}$
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $e^{2-3x} \geqslant 1$

EXERCICE 3

Limite et dérivée. **(3 points)**

Soit le fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-2)e^x$

1) En mettant en évidence les limites de référence si besoin, déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2) a) Déterminer la dérivée de la fonction f.
   b) Résoudre $f'(x) = 0$.

EXERCICE 4

Refroidissement d'un four **(5 points)**

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000 °C.
À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit.
On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint. La température du four est exprimée en degré Celsius (° C).

La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70° C. Sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.

On note t le temps, **en heure**, écoulé depuis l'instant où le four a été éteint.

La température du four (en degré Celsius) à l'instant t est donnée par la fonction f définie, pour tout nombre réel t positif, par :

$$f(t) = a\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + b, \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

On admet que f vérifie la relation suivante : $f'(t) + \dfrac{1}{5} f(t) = 4$.

1) Déterminer les valeurs de a et b sachant qu'initialement, la température du four est de 1 000 °C, c'est-à-dire que $f(0) = 1\,000$.
2) Pour la suite, on admet que, pour tout nombre réel positif t : $f(t) = 980\,e^{-\frac{t}{5}} + 20$.
   a) Déterminer la limite de f lorsque t tend vers $+\infty$.
   b) Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$. En déduire son tableau de variations.
   c) Avec ce modèle, après combien de minutes le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

   On montrera rigoureusement qu'il existe une unique valeur de t à partir de laquelle on peut ouvrir le four et l'on donnera un encadrement **à la minute** près de cet valeur.

EXERCICE 5

Étude d'une fonction **(6 points)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1) Pourquoi la fonction f est-elle définie sur $\mathbb{R}$?
2) a) Montrer que si $x \neq 0$, on a : $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x} - 1}$
   b) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Interpréter géométriquement.
3) a) Déterminer la fonction dérivée f'.
   b) Étudier le signe de la dérivée puis dresser le tableau de variation de la fonction f.
4) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
5) Tracer soigneusement la courbe $\mathscr{C}_f$, en indiquant la tangente horizontale, et la tangente (T) sur l'annexe ci-jointe.

Nom :

Prénom :

Annexe de l'exercice 5

À rendre avec la copie