Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 05 décembre 2018

Exercice 1

Calcul de la constante *e* **(4 points)**

1) Soit la fonction f telle que : $f(x) = e^x - (x+1)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^x - 1$.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \overset{\text{exp monotone}}{\Leftrightarrow} x = 0$.
- Comme la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$, la fonction f' aussi. On a donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(0)=0$	$\nearrow$	

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant x+1$.

2) La fonction $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

a) Pour $x = \dfrac{1}{n}$, l'inégalité devient :

$$e^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \frac{1}{n} \overset{\uparrow n}{\Rightarrow} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n \geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow e^1 \geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow e \geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

b) Pour $x = -\dfrac{1}{n}$, l'inégalité devient :

$$e^{-\frac{1}{n}} \geqslant 1 - \frac{1}{n} \overset{\uparrow n}{\Rightarrow} \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n \geqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow e^{-1} \geqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{e} \geqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

c) La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$: $\dfrac{1}{e} \geqslant \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n \overset{\uparrow(-1)}{\Rightarrow} e \leqslant \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$

On obtient l'encadrement : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$.

3) Pour $n = 1000$, on obtient : $2,717 \leqslant e \leqslant 2,720$.

Exercice 2

Équation, inéquation **(2 points)**

1) $e^{x^2-2} = e^{5x+4} \overset{\text{exp monotone sur } \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} x^2 - 2 = 5x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$.

$x_1 = -1$ racine évidente, $P = -6$ donc $x_2 = 6$. On a $S = \{-1\,;\,6\}$.

2) $e^{2-3x} \geqslant 1 \Leftrightarrow e^{2-3x} \geqslant e^0 \overset{\text{exp croissante sur } \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} 2 - 3x \geqslant 0 \Leftrightarrow -3x \geqslant -2 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{2}{3}$

On a : $S = \left]-\infty\,;\,\dfrac{2}{3}\right]$.

EXERCICE 3

Limite et dérivée. **(3 points)**

1) • En $+\infty$: $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x-2=+\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}\text{Par produit} \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\end{array}$

• En $-\infty$, on change la forme : $f(x)=xe^x-2e^x$.

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x=0$, par produit et somme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$.

2) a) $f'(x)=e^x+(x-2)e^x=e^x(1+x-2)=(x-1)e^x$.

b) Comme la fonction exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$:

$f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-1)e^x \quad\Leftrightarrow\quad x-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=1$.

EXERCICE 4

Refroidissement d'un four **(5 points)**

1) $f'(t)+\dfrac{1}{5}f(t)=4 \quad\Leftrightarrow\quad -\dfrac{a}{5}e^{-\frac{t}{5}}+\dfrac{a}{5}e^{-\frac{t}{5}}+\dfrac{b}{5}=4 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{b}{5}=4 \quad\Leftrightarrow\quad b=20$.

La fonction f est alors de la forme : $f(t)=ae^{-\frac{t}{5}}+20$.

$f(0)=1\,000 \quad\Leftrightarrow\quad a+20=1000 \quad\Leftrightarrow\quad a=980$.

Conclusion : $f(t)=980e^{-\frac{t}{5}}+20$.

2) a) $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -\frac{t}{5}=-\infty \\ \displaystyle\lim_{t\to-\infty} e^t=0\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}\text{Par composition} \\ \displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{t}{5}}=0\end{array}$ par produit et somme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)=20$

b) $f'(x)=-\dfrac{980}{5}e^{-\frac{t}{5}}=-196\,e^{-\frac{t}{5}}$, donc $\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad f'(x)<0$.

La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ ce qui est cohérent avec le refroidissement du four.

t	0	t_{70}	$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	1000	70	20

c) Sur $[0\,;+\infty[$

- La fonction f est continue car dérivable.
- La fonction f est monotone (décroissante).
- 70 est compris entre $f(0)=1000$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)=20$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t)=70$ admet une unique solution t_{70} sur $\mathbb{R}_+$.

Pour trouver un intervalle fermé, on calcule $f(50)=20,04$ donc $0<t_{70}<50$.

Pour utiliser l'algorithme de dichotomie avec la calculatrice, comme ce programme résout $f(x) = 0$, il faut entrer ici comme fonction
$g(x) = f(x) - 70 = 980\, e^{-\frac{x}{5}} + 20 - 70 = 980\, e^{-\frac{x}{5}} - 50$

On trouve alors : $14,877 < t_{70} < 14,878$ après 50 itérations.

Transformons le résultat en heures, minutes :
$14,877 \times 60 < 892' \approx 14\text{ h }52'$ et $14,878 > 14\text{ h }53'$

On peut ouvrir les porte du four après 14 h 53'.

Exercice 5

Étude d'une fonction **(6 points)**

1) On sait que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > x \Leftrightarrow e^x - x > 0$.
Le dénominateur n'est donc jamais nul. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) a) Si x est non nul, on divise numérateur et dénominateur par x : $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x} - 1}$.

b) • En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} - 1 = +\infty$ par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

• En $-\infty$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty\end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0$ par somme et quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

• $\mathscr{C}_f$ admet 2 asymptotes horizontales $y = 0$ en $+\infty$ et $y = -1$ en $-\infty$.

3) a) $f'(x) = \dfrac{e^x - x - x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \dfrac{e^x - x - xe^x + x}{(e^x - x)^2} = \dfrac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$.

b) • $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$
• Le signe de $f'(x)$ est celui de $(1 - x)$.

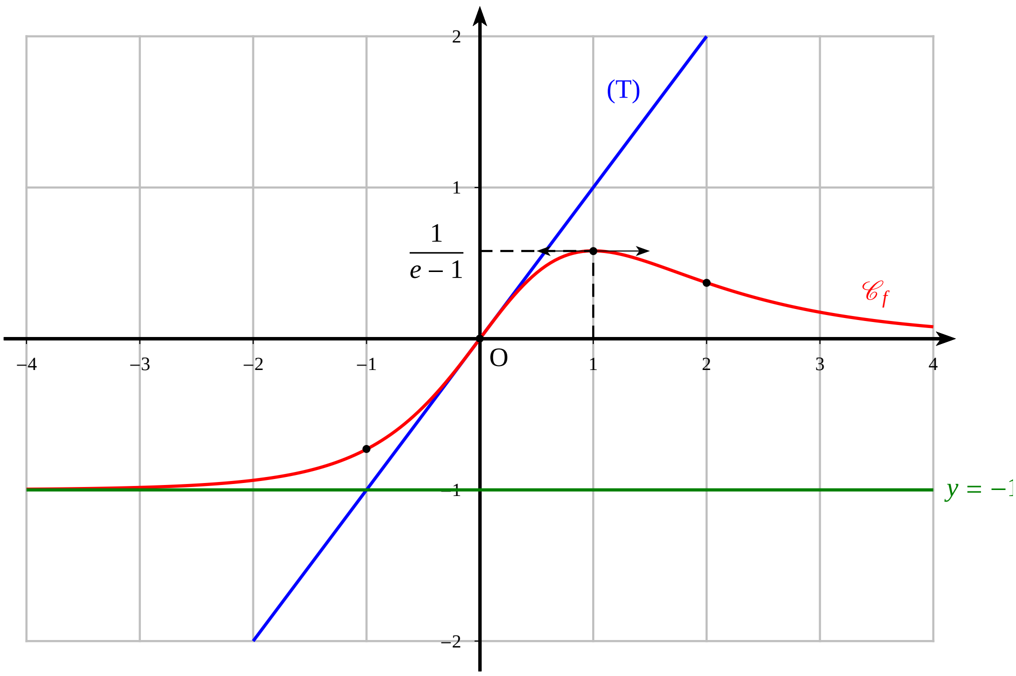
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

4) L'équation de la tangente en 0 : $y = f'(0)x + f(0) \Leftrightarrow y = x$

5) Pour tracer soigneusement $\mathscr{C}_f$, on calcule quelques images :

$f(1) = \dfrac{1}{e-1} \approx 0,58, \quad f(0) = 0, \quad f(-1) = \dfrac{-1}{e^{-1}+1} \approx -0,73, \quad f(2) = \dfrac{2}{e^x - 2} \approx 0,37$

On peut remarquer qu'en $x = 0$, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion.



2
1
−1
−2
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
O
(T)
$\frac{1}{e-1}$
$\mathscr{C}_f$
$y = -1$