Devoir à rendre pour le lundi 7 janvier 2019

EXERCICE I

Équations, inéquation, limites **(8 points)**

1) Résoudre les équations suivantes en ayant soin de déterminer l'ensemble sur lequel votre calcul est valable. On visualisera cet ensemble sur une droite orientée.

   a) $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln x$ b) $\ln(-x-1)=\ln\left(\dfrac{-x-10}{x+2}\right)$

2) a) Résoudre l'équation : $X^2-4X-1=0$

   b) En déduire les solutions des équations suivantes :

   α) $e^{2x}-4e^x-1=0$ β) $(\ln x)^2-4\ln x-1=0$

3) Résoudre les inéquations suivantes en ayant soin de déterminer l'ensemble sur lequel votre calcul est valable. On visualisera l'ensemble solution sur une droite orientée.

   a) $\ln(2x+3)\leqslant -1+\ln(5-x)$ b) $(2x-7)\ln(x+1)\geqslant 0$

4) Soient les fonctions f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1+2\ln x}{x^2} \quad \text{et} \quad g(x)=\ln(x+3)-\ln(2x+1)$$

   Déterminer les limites des fonctions f et g en $+\infty$

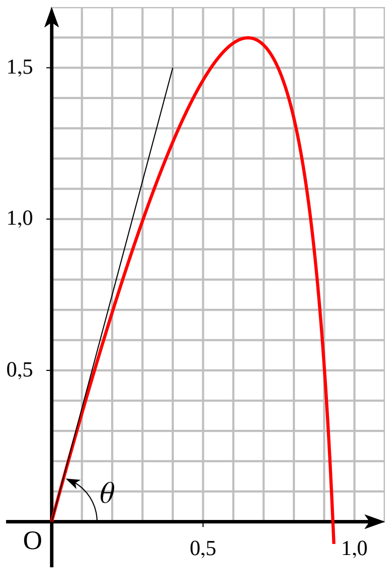
EXERCICE II

Projectile dans un fluide **(6 points)**

Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas $1,6$ mètre.
Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.
On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1[$ par :

$$f(x)=bx+2\ln(1-x)$$

où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.



1) a) Calculer la fonction dérivée f' sur l'intervalle $[0\,;1[$

   b) Montrer que la fonction f admet un maximum sur $[0\,;1[$.

2) On veut déterminer les valeurs du paramètre b pour lequel la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas $1,6$ mètre.

Pour cela, on pose la fonction g définie sur $\mathrm{I} = [2\,;+\infty[$ par : $g(x) = x-2+2\ln 2-2\ln x$.

a) Montrer que le problème revient à résoudre $g(x) \leqslant 1,6$

b) Montrer que la fonction g est strictement croissante sur I.

c) Montrer que l'équation $g(x) = 1,6$ admet une unique solution α sur I.
Déterminer un encadrement de la valeur de α à 10^{-3} près.

d) Déterminer les valeurs de b répondant au problème.

3) Dans cette question, on choisit $b = 5,69$.
L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus.
Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ.

Exercice III

Fonction et algorithme **(6 points)**

L'épicéa commun est une espèce d'arbre résineux qui peut mesurer jusqu'à 40 mètres de hauteur et vivre plus de 150 ans. L'objectif de cet exercice est d'estimer l'âge et la hauteur d'un épicéa à partir du diamètre de son tronc mesuré à 1,30 m du sol.

Partie A - Modélisation de l'âge d'un épicéa

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à $1,30$ m du sol par la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;1[$ par :

$$f(x) = 30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$$

où x désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en années.

1) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;1[$.

2) Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

Partie B

On a relevé la hauteur moyenne des épicéas dans des échantillons représentatifs d'arbres âgés de 50 à 150 ans. Le tableau suivant, réalisé à l'aide d'un tableur, regroupe ces résultats et permet de calculer la vitesse de croissance moyenne d'un épicéa.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Âges (en années)	50	70	80	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	Hauteurs (en mètres)	11,2	15,6	18,05	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
3	Vitesse de croissance (en mètres par année)		0,22	0,245	0,25	0,25	0,25	0,24	0,24	0,24	0,22	0,205	0,168

1) Déterminer la hauteur attendue d'un épicéa dont le diamètre du tronc à $1,30$ m du sol vaut 27 cm.

2) La qualité du bois est meilleure au moment où la vitesse de croissance est maximale.

a) Déterminer un intervalle d'âges durant lequel la qualité du bois est la meilleure en expliquant la démarche.

b) Est-il cohérent de demander de couper les arbres lorsque leur diamètre mesure environ 70 cm ?