Contrôle de mathématiques

Mercredi 06 février 2019

EXERCICE 1

Application du cours **(7 points)**

1) Écrire sous la forme algébrique : $z = \dfrac{7+4i}{3-2i}$

2) Soit l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$: $z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0$
   a) Montrer que 2 est solution de l'équation (E).
   b) Montrer que l'on peut mettre l'équation (E) sous la forme : $(z-2)(z^2+6z+14) = 0$.
   c) Résoudre alors l'équation (E).

3) On donne le nombre complexe : $z = (-\sqrt{3} + i)^{2019}$
   a) Donner la forme trigonométrique et exponentielle du nombre $-\sqrt{3} + i$
   b) Montrer que le nombre z est un imaginaire pur.

4) Déterminer et représenter les ensembles des point M d'affixe z dans les cas suivants :
   On prendra comme unité 2 cm sur les deux axes du plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

   a) $|z-1| = |z-i|$ b) $|z+i| = 2$

EXERCICE 2

Suite **(5 points)**

On définit la suite de nombres complexes (z_n) : $z_0 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{1}{3}z_n + \dfrac{2}{3}i$.

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point du plan d'affixe z_n.
Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = z_n - i$ et on note B_n le point d'affixe u_n.
On note C le point d'affixe i.

1) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, pour tout entier naturel n.

   Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

2) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n (1-i)$.

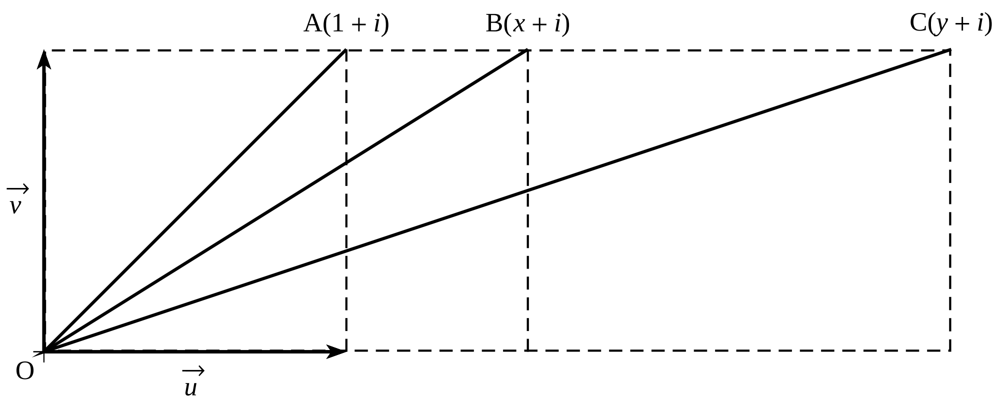
3) a) Pour tout entier naturel n, calculer, en fonction de n, le module de u_n.
   b) Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} |z_n - i| = 0$.
   c) Quelle interprétation géométrique peut-on donner de ce résultat ?

Exercice 3

Propriété géométrique **(8 points)**

Dans cet exercice, x et y sont des nombres réels supérieurs à 1.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1 + i$, $z_B = x + i$ et $z_C = y + i$.



On cherche les valeurs éventuelles des réels x et y, supérieures à 1, pour lesquelles :

$$\mathrm{OC} = \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \quad \text{et} \quad \left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right).$$

1) Démontrer que si $\mathrm{OC} = \mathrm{OA} \times \mathrm{OB}$, alors $y^2 = 2x^2 + 1$.

2) Reproduire sur la copie et compléter l'algorithme ci-contre pour qu'il affiche tous les couples (x, y) tels que :

$$\begin{cases} y^2 = 2x^2 + 1 \\ x \text{ et } y \text{ sont des nombres entiers} \\ 1 \leqslant x \leqslant 10 \text{ et } 1 \leqslant y \leqslant 10 \end{cases}$$

Lorsque l'on exécute cet algorithme, il affiche les valeurs 2 et 3.

Traitement
pour x variant de 1 à . . . **faire**
  pour . . . . **faire**
    si . . . . **alors**
      Afficher x et y
    fin
  fin
fin

3) Étude d'un cas particulier : dans cette question seulement, on prend $x = 2$ et $y = 3$.
   a) Donner le module et un argument de z_A.
   b) Montrer que $\mathrm{OC} = \mathrm{OA} \times \mathrm{OB}$.
   c) Montrer que $z_B z_C = 5z_A$ et en déduire que $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$.

4) On revient au cas général, et on cherche s'il existe d'autres valeurs des réels x et y telles que les points A, B et C vérifient les deux conditions :

$$\mathrm{OC} = \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \quad \text{et} \quad \left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right).$$

   a) Montrer que : $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) \Rightarrow \arg\left[\dfrac{(x+i)(y+i)}{1+i}\right] = 0 \ [2\pi]$.
   En déduire que sous cette condition : $x + y - xy + 1 = 0$.
   b) Démontrer que si les deux conditions sont vérifiées et que de plus $x \neq 1$, alors :

$$y = \sqrt{2x^2 + 1} \quad \text{et} \quad y = \frac{x+1}{x-1}.$$

5) Soit les fonctions f et g définies sur $]1\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{2x^2+1}$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.
Déterminer le nombre de solutions du problème initial.

On pourra utiliser la fonction h définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$ et s'appuyer sur la copie d'écran d'un logiciel de calcul formel donnée ci-dessous.

$f(x) := \text{sqrt}(2 * x\text{^}2 + 1)$
$x \longrightarrow \sqrt{2 * x^2 + 1}$
deriver(f)
$x \longrightarrow \dfrac{2 * x}{\sqrt{2 * x^2 + 1}}$
$g(x) := (x + 1)/(x - 1)$
$x \longrightarrow \dfrac{x+1}{x-1}$
deriver(g)
$x \longrightarrow -\dfrac{2}{(x-1)^2}$