Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 06 février 2019

EXERCICE 1

Application du cours **(7 points)**

1) $z = \dfrac{7+4i}{3-2i} = \dfrac{(7+4i)(3+2i)}{9+4} = \dfrac{21+14i+12i-8}{13} = \dfrac{13+26i}{13} = 1+2i$

2) a) $2^3 + 4 \times 2^2 + 2 \times 2 - 28 = 8 + 16 + 4 - 28 = 0.$

On en déduit que 2 est solution de l'équation (E).

b) $(z-2)(z^2+6z+14) = z^3 + 6z^2 + 14z - 2z^2 - 12z - 28 = z^3 + 4z^2 + 2z - 28.$

D'où $(z-2)(z^2+6z+14) = 0 \iff z^3+4z^2+2z-28 = 0 \iff$ (E).

c) $(z-2)(z^2+6z+14) = 0 \iff z = 2$ ou $z^2+6z+14 = 0.$

$z^2+6z+14 = 0$, on a $\Delta = 36 - 56 = -20 = (2i\sqrt{5})^2$ donc $\Delta < 0$.

2 racines complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-6+2i\sqrt{5}}{2} = -3+i\sqrt{5}$ ou $z_2 = -3-i\sqrt{5}$.

Conclusion : $S = \left\{-3-i\sqrt{5}\,;\ -3+i\sqrt{5}\,;\ 2\right\}$.

3) a) On pose $a = -\sqrt{3}+i$. On a alors $|a| = \sqrt{3+1} = 2$ et

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = +\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \theta = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]. \quad \text{On a alors : } a = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\,e^{\frac{5\pi}{6}}.$$

b) $\arg(z) = \arg(a^{2019}) = 2019\arg(a) = \dfrac{2019\times 5\pi}{6} = \dfrac{3365\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} + 841(2\pi) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Comme $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, le nombre z est un imaginaire pur.

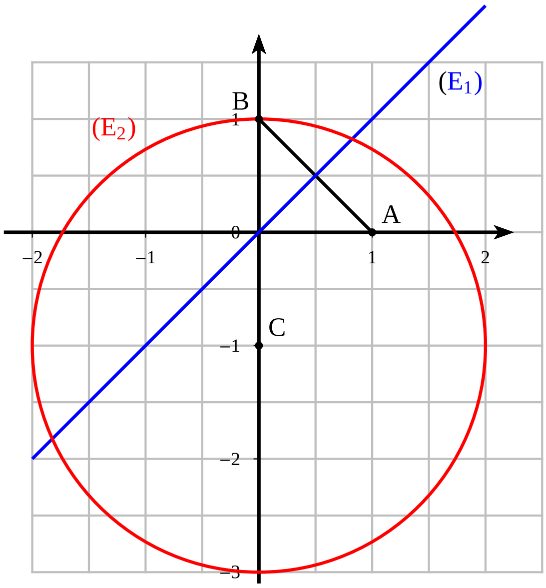
4) On pose A(1), B(i) et C($-i$).

a) $|z-1| = |z-i| \iff |z-z_A| = |z-z_B|$
$\iff$ AM = BM.

L'ensemble (E_1) des points M est donc la médiatrice du segment [AB].

b) $|z+i| = 2 \iff |z-z_C| = 2 \iff$ CM = 2.

L'ensemble (E_2) des points M est donc le cercle de centre C et de rayon 2.



EXERCICE 2

Suite **(5 points)**

On a $A_n(z_n)$, $B_n(u_n)$ et $C(i)$.

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = z_{n+1} - i = \dfrac{1}{3}z_n + \dfrac{2}{3}i - i = \dfrac{1}{3}z_n - \dfrac{1}{3}(z_n - i) = \dfrac{1}{3}u_n.$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$ et de 1$^{\text{er}}$ terme $u_0 = z_0 - i = 1 - i$.

Remarque : La suite (z_n) est arithmético-géométrique.

2) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 q^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n (1 - i).$

Remarque : On pourrait faire une récurrence sur n qui est immédiate.

3) a) $|u_n| = \left|\left(\dfrac{1}{3}\right)^n (1 - i)\right| = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n |1 - i| = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n.$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$, par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0.$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left|z_n - i\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0.$

c) $|u_n| = OB_n$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$, pour n grand le point B_n se rapproche de l'origine.

$|z_n - i| = |z_n - z_C| = CA_n$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - i| = 0$ pour n grand le point A_n se rapproche du point C.

EXERCICE 3

Propriété géométrique **(8 points)**

1) $OC = OA \times OB \overset{\uparrow 2}{\Leftrightarrow} OC^2 = OA^2 \times OB^2 \Leftrightarrow |y + i|^2 = |1 + i|^2 \times |x + i|^2$

$\Leftrightarrow y^2 + 1 = (1 + 1)(x^2 + 1) \Leftrightarrow y^2 + 1 = 2x^2 + 2 \Leftrightarrow y^2 = 2x^2 + 1$

2) On a l'algorithme suivant :

```
Traitement
  pour x variant de 1 à 10 faire
    pour y variant de 1 à 10 faire
      si y² = 2x² + 1 alors
        Afficher x et y
      fin
    fin
  fin
```

3) a) On a $z_A = 1 + i$. On trouve facilement $|z_A| = \sqrt{2}$ et $\arg(z_A) = \dfrac{\pi}{4}$ $[2\pi]$.

b) $\begin{cases} OC = |3 + i| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10} \\ OA \times OB = |1 + i| \times |2 + i| = \sqrt{2}\sqrt{4 + 1} = \sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow OC = OA \times OB.$

c) $z_B z_C = (2+i)(3+i) = 6 + 2i + 3i - 1 = 5 + 5i = 5(1+i) = 5z_A$.

En traduisant cette relation avec les arguments, on obtient :

$$\arg(z_B z_C) = \arg(5z_A) \iff \arg(z_C) + \arg(z_B) = \arg(5) + \arg(z_A) \overset{\arg(5)=0\ [2\pi]}{\iff} \left(\vec{u}\,,\ \overrightarrow{OC}\right) + \left(\vec{u}\,,\ \overrightarrow{OB}\right) = \left(\vec{u}\,,\ \overrightarrow{OA}\right)$$

4) a) En utilisant les propriétés des arguments, on a :

$$\left(\vec{u}\,,\ \overrightarrow{OB}\right) + \left(\vec{u}\,,\ \overrightarrow{OC}\right) - \left(\vec{u}\,,\ \overrightarrow{OA}\right) = 0 \iff \arg(z_C) + \arg(z_B) - \arg(z_A) = 0$$

$$\iff \arg\left(\frac{z_B z_C}{z_A}\right) = 0 \iff \arg\left[\frac{(x+i)(y+i)}{1+i}\right] = 0\ [2\pi]$$

$$z = \frac{(x+i)(y+i)}{1+i} = \frac{xy + xi + yi - 1}{1+i} = \frac{[xy - 1 + i(x+y)(1-i)]}{1+1}$$
$$= \frac{xy - 1 - i(xy-1) + i(x+y) + x + y}{2} = \frac{xy + x + y - 1 + i(x + y - xy + 1)}{2}$$

$\arg(z) = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Rightarrow x + y - xy + 1 = 0.$

b) D'après question 1) : $OC = OA \times OB \Rightarrow y^2 = 2x^2 + 1 \overset{y>0}{\Rightarrow} y = \sqrt{2x^2+1}$

D'après le question 4a) : $\left(\vec{u}\,,\ \overrightarrow{OB}\right) + \left(\vec{u}\,,\ \overrightarrow{OC}\right) = \left(\vec{u}\,,\ \overrightarrow{OA}\right) \Rightarrow x + y - xy + 1 = 0$

$\Rightarrow xy - y = x + 1 \Rightarrow y(x-1) = x + 1 \overset{x\neq 1}{\Rightarrow} y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

5) Soit la fonction h définie sur $]1\ ;\ +\infty[$ par : $h(x) = f(x) - g(x)$.

D'après la copie d'écran $h'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}} + \dfrac{2}{(x-1)^2} > 0 \quad \forall x > 1$.

La fonction h est continue et croissante sur $]1\ ;\ +\infty[$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, si la fonction h s'annule, elle s'annule qu'une seule fois.

or $h(2) = \sqrt{8+1} - \dfrac{2+1}{2-1} = 3 - 3 = 0$.

Le porblème initiale n'admet donc qu'une solution (2,3).