Contrôle de mathématiques

Mercredi 10 avril 2019

Exercice 1

Sucre **(8 points)**

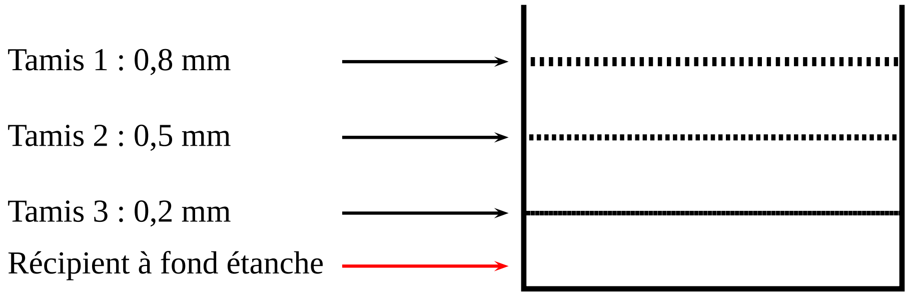
Une entreprise conditionne du sucre blanc provenant de deux exploitations U et V en paquets de 1 kg et de différentes qualités. Le sucre extra fin est conditionné séparément dans des paquets portant le label « extra fin ».

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au **millième**.

Partie A

Pour calibrer le sucre en fonction de la taille de ses cristaux, on le fait passer au travers d'une série de trois tamis positionnés les uns au-dessus des autres et posés sur un récipient à fond étanche. Les ouvertures des mailles sont les suivantes :



Les cristaux de sucre dont la taille est inférieure à 0,2 mm se trouvent dans le récipient à fond étanche à la fin du calibrage. Ils seront conditionnés dans des paquets portant le label « sucre extra fin ».

1) On prélève au hasard un cristal de sucre de l'exploitation U. La taille de ce cristal, exprimée en millimètre, est modélisée par la variable aléatoire X_{U} qui suit la loi normale de moyenne $\mu_{\text{U}} = 0,58$ mm et d'écart type $\sigma_{\text{U}} = 0,21$ mm.

   a) Calculer les probabilités des évènements suivants : $X_{\text{U}} < 0,2$ et $0,5 \leqslant X_{\text{U}} < 0,8$.

   b) On fait passer 1 800 grammes de sucre provenant de l'exploitation U au travers de la série de tamis.

      Déduire de la question précédente une estimation de la masse de sucre récupérée dans le récipient à fond étanche et une estimation de la masse de sucre récupérée dans le tamis 2.

2) On prélève au hasard un cristal de sucre de l'exploitation V. La taille de ce cristal, exprimée en millimètre, est modélisée par la variable aléatoire X_{V} qui suit la loi normale de moyenne $\mu_{\text{V}} = 0,65$ mm et d'écart type σ_{V} à déterminer.

   Lors du calibrage d'une grande quantité de cristaux de sucre provenant de l'exploitation V, on constate que 40 % de ces cristaux se retrouvent dans le tamis 2.

   Quelle est la valeur de l'écart type σ_{V} de la variable aléatoire X_{V} ?

Partie B

Dans cette partie, on admet que 3 % du sucre provenant de l'exploitation U est extra fin et que 5 % du sucre provenant de l'exploitation V est extra fin.
On prélève au hasard un paquet de sucre dans la production de l'entreprise et, dans un souci de traçabilité, on s'intéresse à la provenance de ce paquet.
On considère les évènements suivants :

- U : « Le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation U » ;
- V : « Le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation V » ;
- E : « Le paquet porte le label "extra fin" ».

1) Dans cette question, on admet que l'entreprise fabrique 30 % de ses paquets avec du sucre provenant de l'exploitation U et les autres avec du sucre provenant de l'exploitation V, sans mélanger les sucres des deux exploitations.
   a) Quelle est la probabilité que le paquet prélevé porte le label « extra fin » ?
   b) Sachant qu'un paquet porte le label « extra fin », quelle est la probabilité que le sucre qu'il contient provienne de l'exploitation U ?
2) L'entreprise souhaite modifier son approvisionnement auprès des deux exploitations afin que parmi les paquets portant le label « extra fin », 30 % d'entre eux contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.

   Comment doit-elle s'approvisionner auprès des exploitations U et V ?

   Toute trace de recherche sera valorisée dans cette question.

EXERCICE 2

Laboratoire pharmaceutique **(3 points)**

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.
Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à $0,4$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
2) Dans cette question, on suppose que $n = 40$ et l'on donnera les prabablilité à 10^{-3} près.
   a) Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées. On donnera la formule utilisée.
   b) Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.

EXERCICE 3

Caisses automatiques **(3 points)**

Un supermarché est équipée de bornes automatiques de paiement que le client utilise seul.

La durée d'attente à une borne automatique, exprimée en minutes, est modélisée par une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ. Une étude statistique a montré que la probabilité d'attendre moins de 10 minutes est de 0,865.

1) Montrer que $\lambda = 0,200$ puis donner la durée moyenne d'attente d'un client à une borne automatique de paiement.
2) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, que la durée d'attente d'un client, ayant déjà attendue 5 minutes à une borne automatique de paiement, soit supérieure à 12 minutes.

Exercice 4

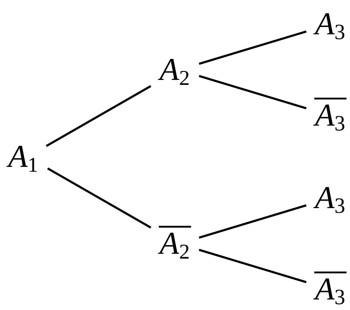
Ventes de melons **(6 points)**

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.
Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

- parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;
- parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ».
On a ainsi $p(A_1) = 1$.

1) a) Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, relatif aux trois premières semaines.
   b) Démontrer que $p(A_3) = 0,85$.
   c) Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ?
   Arrondir au centième.



Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

2) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
3) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n > 0,8$.
   b) Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
   c) La suite (p_n) est-elle convergente ?
4) On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = p_n - 0,8$.
   a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_1 et la raison.
   b) Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.
   c) Déterminer la limite de la suite (p_n).