Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 10 avril 2019

EXERCICE 1

Sucre **(8 points)**

1) a) $p\,(X_{\rm U} < 0,2) = NormalFRép\,(-1E99\ ,\ 0.2\ ,\ 0.58\ ,\ 0.21) \approx 0,035$.

$p\,(0,5 < X_{\rm U} < 0,8) = NormalFRép\,(0.5,\ 0.8\ ,\ 0.58\ ,\ 0.21) \approx 0,501$.

b) Les probabilités correspondent à une estimation du pourcentage de la masse passée au tamis.

masse de sucre dans le récipient à fond étanche : $p\,(X_{\rm U} < 0,2) \times 1800 = 63$ g.

masse de sucre dans le tamis 2 : $p\,(0,5 < X_{\rm U} < 0,8) \times 1800 = 901,8$ g.

2) D'après l'énoncé $p\,(0,5 < X_{\rm V} < 0,8) = 0,4$.

Comme on ne connaît pas l'écart type,

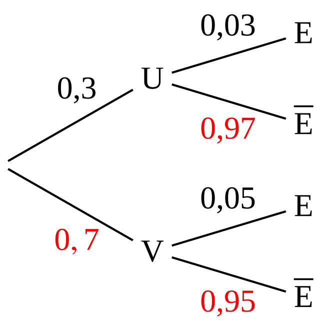
on revient à la loi normale centrée réduite en posant $Z = \dfrac{X_{\rm V} - 0,65}{\sigma_{\rm V}}$. On a alors :

$p\left(-\dfrac{0,15}{\sigma_{\rm V}} < Z < \dfrac{0,15}{\sigma_{\rm V}}\right) = 0,4$. D'après le théorème de l'intervalle centré :

$$p\left(Z < \frac{0,15}{\sigma_{\rm V}}\right) = 0,4 + \frac{0,6}{2} = 0,7 \Leftrightarrow \frac{0,15}{\sigma_{\rm V}} = \Phi^{-1}(0,7) \Leftrightarrow \sigma_{\rm V} = \frac{0,15}{\Phi^{-1}(0,7)} \approx 0,286$$

Partie B

1) On peut schématiser l'énoncé par l'arbre suivant :



a) $p({\rm E}) = p({\rm U} \cap {\rm E}) + p({\rm V} \cap {\rm E}) = p({\rm U})p_{\rm U}({\rm E}) + p({\rm V})p_{\rm V}({\rm E}) = 0,3 \times 0,03 + 0,7 \times 0,05$
$= 0,044$

b) $p_{\rm E}({\rm U}) = \dfrac{p({\rm U} \cap {\rm E})}{p({\rm E})} = \dfrac{0,009}{0,044} = 0,205$.

2) Soit p la proportion de sucre venant de l'exploitation U. On veut que $p_{\rm E}({\rm U}) = 0,3$.

$$\frac{0,03p}{0,03p + 0,05(1-p)} = 0,3 \Leftrightarrow \frac{0,03p}{0,05 - 0,02p} = 0,3 \Leftrightarrow 0,03p = 0,015 - 0,006p \Leftrightarrow$$

$$0,036p = 0,015 \Leftrightarrow p = \frac{0,015}{0,036} = \frac{5}{12} \approx 0,417$$

L'entreprise doit s'approvisionner dans les proportions de $\dfrac{5}{12}$ pour U et de $\dfrac{7}{12}$ pour V.

EXERCICE 2

Laboratoire pharmaceutique **(3 points)**

1) On réitère n fois un tirage de façon identique et indépendante dont la probabilité de succès est $p = 0,4$.
La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres n et 0,4.

2) a) $p(X = 15) = \binom{40}{15} 0,4^{15}\, 0,6^{25} = binomFdp\,(40\ ,\ 0.4\ ,\ 15) \approx 0,123$

b) $p(X \geqslant 20) = 1 - p(X \leqslant 19) = 1 - binomFRép\,(40\ ,\ 0.4\ ,\ 19) \approx 0,130$

EXERCICE 3

Caisses automatiques **(3 points)**

1) $p\,(T < 10) = 0,865 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - e^{-10\lambda} = 0,865 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-10\lambda} = 0,135$

$\overset{\ln}{\Leftrightarrow} \quad -10\lambda = \ln(0,135) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\dfrac{\ln(0,135)}{10} \approx 0,200$

$E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,2} = 5.$ Le temps d'attente moyen à la borne est de 5 minutes.

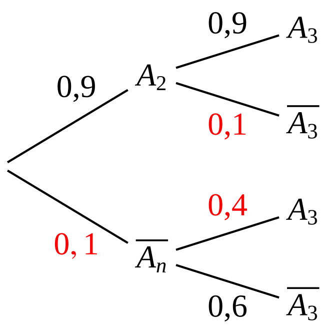
2) $p_{T \geqslant 5}\,(T \geqslant 12) \overset{\text{sans mémoire}}{=} p\,(T \geqslant 7) = e^{-7\times 0,2} = e^{-1,4} \approx 0,247$

EXERCICE 4

Ventes de melons **(6 points)**

D'après l'énoncé, on a : $p_{A_n}\,(A_{n+1}) = 0,9$ et $p_{\overline{A_n}}\,(\overline{A_{n+1}}) = 0,6$.

1) a) On obtient l'arbre suivant



b) $p(A_3) = p(A_2 \cap A_3) + p(\overline{A_2} \cap A_3) = p(A_2)p_{A_2}(A_3) + p(\overline{A_2})p_{\overline{A_2}}\,(A_3)$
$= 0,9^2 + 0,1 \times 0,4 = 0,85.$

c) $p_{A_3}(A_2) = \dfrac{p(A_2 \cap A_3)}{p(A_3)} = \dfrac{0,81}{0,85} \approx 0,95$

2) $p_{n+1} = p(A_{n+1}) = p(A_n \cap A_{n+1}) + p(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) = p(A_n)p_{A_n}(A_{n+1}) + p(\overline{A_n})p_{\overline{A_n}}\,(A_{n+1})$
$= 0,9p_n + 0,4(1 - p_n) = 0,5p_n + 0,4.$

3) a) **Initialisation :** : $n = 1$, $p_1 = 1 > 0,8$ la proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $p_n > 0,8$, montrons que $p_{n+1} > 0,8$.

$p_n > 0,8 \quad \overset{\times 0,5}{\Leftrightarrow} \quad 0,5p_n > 0,4 \quad \overset{+0,4}{\Leftrightarrow} \quad 0,5p_n + 0,4 > 0,8 \quad \Leftrightarrow \quad p_{n+1} > 0,8.$

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ p_n > 0,8.$

b) $p_{n+1} - p_n = 0,5p_n + 0,4 - p_n = -0,5p_n + 0,4$. Pour tout entier n non nul, on a :

$$p_n > 0,8 \overset{\times(-0,5)}{\Leftrightarrow} -0,5p_n < -0,4 \overset{+0,4}{\Leftrightarrow} -0,5p_n + 0,4 < 0 \Leftrightarrow p_{n+1} - p_n < 0$$

La suite (p_n) est décroissante.

c) La suite (p_n) est décroissante et minorée par 0,8, d'après le théorème des suites monotones, la suite (p_n) est convergente.

4) a) $v_{n+1} = p_{n+1} - 0,8 = 0,5p_n + 0,4 - 0,8 = 0,5(p_n - 0,8) = 0,5v_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0,5$, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_1 = 1 - 0,8 = 0,2$.

b) $v_n = v_1\, q^{n-1} = 0,2 \times 0,5^{n+1} \quad \Rightarrow \quad p_n = v_n + 0,8 = 0,2 \times 0,5^{n-1} + 0,8$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^{n-1} = 0$ car $-1 < 0,5 < 1$. Par produit et somme $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0,8$.