Contrôle de mathématiques

Mercredi 29 mai 2019

Exercice 1

Tortues **(10 points)**

Deux espèces de tortues endémiques d'une petite île de l'océan pacifique, les tortues vertes et les tortues imbriquées, se retrouvent lors de différents épisodes reproducteurs sur deux des plages de l'île pour pondre. Cette île, étant le point de convergence de nombreuses tortues, des spécialistes ont décidé d'en profiter pour recueillir différentes données sur celles-ci.

Ils ont dans un premier temps constaté que les couloirs empruntés dans l'océan par chacune des deux espèces pour arriver sur l'île pouvaient être assimilés à des trajectoires rectilignes.
L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ d'unité 100 mètres.

Le plan $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ représente le niveau de l'eau et on admet qu'un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ avec $z < 0$ se situe dans l'océan.

La modélisation des spécialistes établit que :

- la trajectoire empruntée dans l'océan par les tortues vertes a pour support la droite (D_1) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 3+t \\ y = 6t \\ z = -3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$
- la trajectoire empruntée dans l'océan par les tortues imbriquées a pour support la droite (D_2) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 10k \\ y = 2+6k \\ z = -4k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$

1) Démontrer que les deux espèces ne sont jamais amenées à se croiser avant d'arriver sur l'île.
2) L'objectif de cette question est d'estimer la distance minimale séparant ces deux trajectoires.
   a) Vérifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 27 \end{pmatrix}$ est normal aux droites (D_1) et (D_2).
   b) On admet que la distance minimale entre les droites (D_1) et (D_2) est la distance HH′ où $\overrightarrow{HH'}$ est un vecteur colinéaire à $\vec{n}$ avec H appartenant à la droite (D_1) et H′ appartenant à la droite (D_2).
   Déterminer une valeur arrondie en mètre de cette distance minimale.
   On pourra utiliser les résultats ci-après fournis par un logiciel de calcul formel

▹ Calcul formel	
1	Résoudre$(\{10*k-3-t = 3*l, 2+6*k-6*t = 13*l, -4*k+3*t = 27*l\}, \{k,\ l,\ t\})$ $\to \left\{\left\{k = \dfrac{675}{1\,814}, \ell = \dfrac{17}{907}, t = \dfrac{603}{907}\right\}\right\}$

3) Les scientifiques décident d'installer une balise en mer.
   Elle est repérée par le point B de coordonnées $(2; 4; 0)$.
   a) Soit M un point de la droite (D_1).
      Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.
   b) En déduire la distance minimale, arrondie au mètre, entre la balise et les tortues vertes.

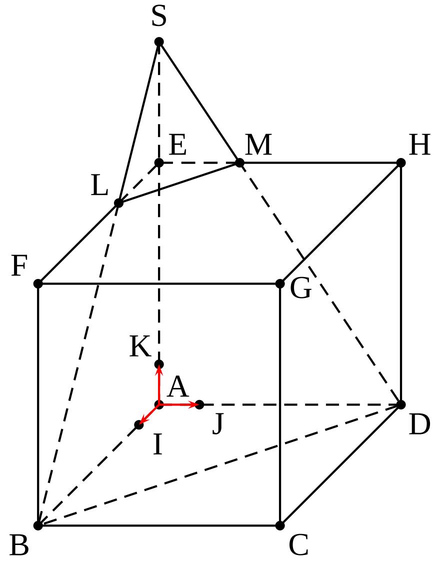
EXERCICE 2

Sculpture **(10 points)**

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête.

Ces deux solides sont représentés par le cube ABCDEFGH et par le tétraèdre SELM ci-dessous.

Soit le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}\right)$
$I \in [AB]$, $J \in [AD]$, $K \in [AE]$
$AI = AJ = AK = 1$,
l'unité graphique représentant 1 mètre.



Les points L, M et S sont définis de la façon suivante :
- L est le point tel que $\overrightarrow{FL} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{FE}$;
- M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH);
- S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).

1) Démontrer, sans calcul de coordonnées, que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.
2) Démontrer que les coordonnées du point L sont $(2 ; 0 ; 6)$.
3) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (BL).
   b) Vérifier que les coordonnées du point S sont $(0 ; 0 ; 9)$.
4) Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3 ; 3 ; 2)$.
   a) Vérifier que $\vec{n}$ est normal au plan (BDL).
   b) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDL) est : $3x + 3y + 2z - 18 = 0$.
   c) On admet que la droite (EH) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 6 \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$
      Calculer les coordonnées du point M.
5) Calculer le volume du tétraèdre SELM.
6) L'artiste souhaite que la mesure de l'angle $\widehat{SLE}$ soit comprise entre 55° et 60°.
   Cette contrainte d'angle est-elle respectée ?