Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 29 mai 2019

EXERCICE 1

Tortues **(10 points)**

1) On cherche le point d'intersection des deux droites (D_1) et (D_2). On cherche t et k tels que :

$$\begin{cases} 3+t=10k & (1) \\ 6t=2+6k & (2) \\ -3t=-4k & (3)\times 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+t=10k & (1) \\ 6t=2+6k & (2) \\ -6t=-8k & (3') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2k+2=0 & (2)+(3') \\ 3+t=10k & (1) \\ 6t=2+6k & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ t=7 & (2) \\ 6t=8 & (3) \end{cases} \quad \text{incompatibles.}$$

Il n'existe pas de point d'intersection aux droites (D_1) et (D_2), les deux espèces ne se croisent pas avant d'arriver sur l'île.

2) a) Soit $u_1=(1\ ,\ 6\ ,-3)$ un vecteur directeur de (D_1) et $u_2=(10\ ,\ 6\ ,-4)$ un vecteur directeur de (D_2).

Montrons que $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$:

$$\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}1\\6\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\13\\27\end{pmatrix}=3+78-81=0\ ,\quad \overrightarrow{u_2}\cdot\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}10\\6\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\13\\27\end{pmatrix}=30+78-108=0$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est bien normal aux droites (D_1) et (D_2).

b) Comme $\overrightarrow{\text{HH'}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{n}$, on a $\overrightarrow{\text{HH'}}=\ell\overrightarrow{n}$ avec $\ell\in\mathbb{R}^*$.

Comme H et H' appartiennent respectivement à (D_1) et (D_2) : $\overrightarrow{\text{HH'}}=\begin{pmatrix}10k-3-t\\2+6k-6t\\-4k+3t\end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{\text{HH'}}=\ell\overrightarrow{n} \Leftrightarrow \begin{cases} 10k-3-t=3\ell \\ 2+6k-6t=13\ell \\ -4k+3t=27\ell \end{cases} \text{le logiciel formel nous donne : } \ell=\frac{17}{907}.$$

On a alors : $\overrightarrow{\text{HH'}}=\dfrac{17}{907}\overrightarrow{n}$ et $\|\overrightarrow{n}\|=\sqrt{3^2+13^2+27^2}=\sqrt{907}$.

La distance minimale est donc : $\text{HH'}=\dfrac{17}{907}\sqrt{907}=\dfrac{17}{\sqrt{907}}\approx 0,56$ unités.

Comme l'unité vaut 100 m la distance minimale est de 56 m.

3) a) On pose la fonction f telle que $f(t)=\text{BM}^2=(3+t-2)^2+(6t-4)^2+(-3t)^2$

La distance entre BM est minimum si $f'(t)=0$.

$f(t)=t^2+2t+1+36t^2-48t+16+9t^2=46t^2-46t+17$.

$f'(t) = 92t - 46$ donc $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{46}{92} = \dfrac{1}{2}$.

Les coordonnées de M_{min} sont alors : $\left(\dfrac{7}{2}, -1, -\dfrac{3}{2}\right)$.

b) La distance minimal vaut alors :

$$\text{BM}_{\text{min}} = \sqrt{f\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{46 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 46 \times \frac{1}{2} + 17} = \sqrt{\frac{23}{2} - 23 + 17} = \sqrt{\frac{11}{2}}.$$
$$\approx 2,35 \text{ unités}$$

Comme l'unité vaut 100 m la distance minimale est de 235 m.

Exercice 2

Sculpture **(10 points)**

1) La section du plan SLM avec le cube est le quadrilatère LMDB.

Comme un plan coupe deux plans parallèles en deux droites parallèles, les faces du cube EFGH et ABCD étant parallèles, les droites (LM) et (BD) sont parallèles.

2) $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$.

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix}$$

3) a) $\overrightarrow{BL} = (2-6, 0, 6) = (-4, 0, 6)$.

Une représentation paramétrique de (BL) : $\begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = 0 \\ z = 6t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

b) Le point S est tel que $\text{S} \in (\text{BL})$ et $x_{\text{S}} = 0$.

On en déduit que $6 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{3}{2}$ d'où $\text{S} = \left(0, 0, 6 \times \dfrac{3}{2}\right) = (0, 0, 9)$

4) a) $\overrightarrow{BD} = (-6, 6, 0)$ donc $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix} = -18 + 18 + 0 = 0$

$\overrightarrow{BL} = (-4, 0, 6)$ donc $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BL} = \begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix} = -12 + 0 + 12 = 0$

Donc $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BDL) donc $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan (BDL).

b) Soit $\text{N}(x, y, z)$ un point du plan (BDL) et $\vec{n}$ un vecteur normal, on a alors :

$$\overrightarrow{BN} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-6\\y\\z\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3(x-6) + 3y + 2z = 0 \Leftrightarrow 3x + 3y + 2z - 18 = 0.$$

c) Le point M est tel que M $\in$ (EH) et M $\in$ (BDL).
En remplaçant les coordonnées paramétrique de M dans l'équation du plan (BDL) on obtient :

$3(0) + 3s + 2(6) - 18 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3s = 6 \quad \Leftrightarrow \quad s = 2.$

On obtient alors les coordonnées du point $\mathrm{M}(0\ ,\ 2\ ,\ 6)$.

5) $\mathcal{V}_{\mathrm{SELM}} = \dfrac{\text{Aire(ELM)} \times \mathrm{ES}}{3} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\mathrm{EL} \times \mathrm{EM}}{2} \times \mathrm{ES}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2 \times 2}{2} \times 3\right) = 2 \text{ m}^2.$

6) Le triangle SLE est rectangle en E donc :

$$\tan \widehat{\mathrm{SLE}} = \frac{\mathrm{ES}}{\mathrm{EL}} = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\mathrm{SLE}} = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) \approx 56,3^\circ.$$

La contrainte d'angle est donc respectée.