

BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 7

- *Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité.*
- *La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
- *Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- ▶ le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.
- ▶ **votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.

EXERCICE 1**(5 points)**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On prendra pour unité graphique le centimètre.

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(z^2 - 2z + 4)(z^2 + 4) = 0$.
- 2) On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = 2i$.
 - a) Écrire z_A et z_B sous forme exponentielle et justifier que les points A et B sont sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.
 - b) Faire une figure et placer les points A et B.
 - c) Déterminer une mesure de l'angle (\vec{OA}, \vec{OB}) .
- 3) On note F le point d'affixe $z_F = z_A + z_B$.
 - a) Placer le point F sur la figure précédente. Montrer que OAFB est un losange.
 - b) En déduire une mesure de l'angle (\vec{OA}, \vec{OF}) puis de l'angle (\vec{u}, \vec{OF}) .
 - c) Calculer le module de z_F et en déduire l'écriture de z_F sous forme trigonométrique.
 - d) En déduire la valeur exacte de : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.
- 4) Deux modèles de calculatrice de marques différentes donnent :

$$\text{pour l'une : } \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \quad \text{et pour l'autre : } \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Ces résultats sont-ils contradictoires ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2**(5 points)**

Une étude statistique a été menée dans une grande ville de France entre le 1^{er} janvier 2000 et le 1^{er} janvier 2010 afin d'évaluer la proportion des ménages possédant une connexion internet fixe.

Au 1^{er} janvier 2000, un ménage sur huit était équipé d'une connexion internet fixe et, au 1^{er} janvier 2010, 64 % des ménages l'étaient.

Cette proportion a été modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(t) = \frac{1}{1 + ke^{-at}},$$

où k et a sont deux constantes réelles positives et la variable t désigne le temps, compté en années, écoulé depuis le 1^{er} janvier 2000.

- 1) a) Déterminer la valeur de k sachant que $g(0) = \frac{1}{8}$.
 - b) Déterminer la valeur de a sachant que $g(10) = \frac{64}{100}$.
On donnera la valeur exacte de a puis une valeur approchée à 10^{-3} .
- 2) Dans la suite, on prendra $k = 7$ et $a = 0,25$. On a alors : $g(t) = \frac{1}{1 + 7e^{-\frac{t}{4}}}$.
 - a) Montrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
 - b) Calculer la limite de la fonction g en $+\infty$.
 - c) Selon cette modélisation, peut-on affirmer qu'un jour, au moins 99 % des ménages de cette ville seront équipés d'une connexion internet fixe ? Justifier la réponse.

- 3) a) Donner, au centième près, la proportion de foyers, prévue par le modèle, équipés d'une connexion internet fixe au 1^{er} janvier 2018.

Au début de l'année 2018, un sondage donnait 88 % de foyers équipés d'une connexion fixe. Déterminer l'erreur en pourcentage entre le modèle prédictif et les statistiques de 2018.

Que pensez-vous du modèle choisi ?

- b) On choisit un autre modèle où la proportion est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(t) = e^{-2,1 \exp(-0.154 t)} \quad \text{où } \exp \text{ représente la fonction exponentielle}$$

Calculer $f(0)$, $f(10)$ et $f(18)$. Que pensez-vous de ce nouveau modèle ?

EXERCICE 3

(5 points)

- 1) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{e^{2x}}{1 + e^x}$.

a) Montrer que $f(x) = e^x - \frac{e^x}{1 + e^x}$.

b) En déduire une primitive F de f sur \mathbb{R} .

c) Calculer la valeur exacte de $I = \int_0^1 f(x) dx$.

Quelle interprétation géométrique peut-on faire de I ? On donnera une réponse précise.

- 2) Un mobile se déplace sur une trajectoire rectiligne à la vitesse $v(t) = \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{2}t + 1$, où t représente le temps compté en seconde et v la vitesse en m/s.

Quelle sera la vitesse moyenne de ce mobile, en km/h, entre les instant $t_0 = 0$ s et $t_1 = 30$ s ?

- 3) On veut calculer l'aire de la surface hachurée déterminée par les fonctions f et g entre les abscisses 0 et 5. On donne la figure suivante :

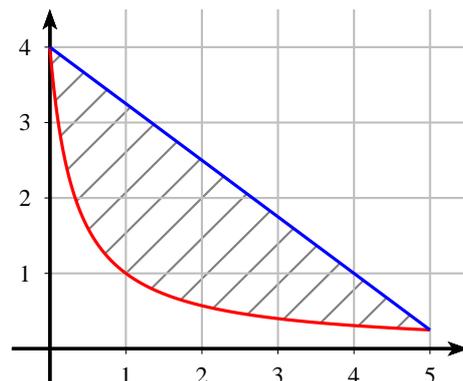
Les fonctions f et g sont définies par

$$f(x) = \frac{4}{3x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = -\frac{3}{4}x + 4$$

Montrer que l'aire de la surface ainsi définie vaut en unité d'aire

$$\frac{85}{8} - \frac{16}{3} \ln 2$$

On expliquera clairement la méthode utilisée.



EXERCICE 4**(5 points)****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1^{er} juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1^{er} juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1^{er} novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n) . Selon ce modèle, pour tout entier naturel n , u_n désigne le nombre de cétacés au 1^{er} juin de l'année 2017 + n . On a donc $u_0 = 3 000$.

- 1) Justifier que $u_1 = 2 926$.
- 2) Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,95u_n + 76$.
- 3) À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n) . Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3 000	2 926	2 856	2 789	2 725	2 665	2 608	2 553

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

- 4) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1 520$.
b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
c) Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.
- 5) On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 1 520$.
a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.
b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 1 480 \times 0,95^n + 1 520$.
c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .
- 6) Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```

Entrées et initialisation
|   $n \leftarrow 0$ 
|   $u \leftarrow 3 000$ 
Traitement
|  tant que ..... faire
|  |   $n \leftarrow \dots$ 
|  |   $u \leftarrow \dots$ 
|  fin
Sorties : .....

```

La notation « \leftarrow » correspond à une affectation de valeur, ainsi « $n \leftarrow 0$ » signifie « affecter à n la valeur 0 ».

- 7) La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.