Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 16 octobre 2019

EXERCICE 1

Question de cours **(2 points)**

1) $\lim u_n = +\infty$:
Tout intervalle du type $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang N.

2) $q > 1$, il existe un réel $a > 0$ tel que : $q = 1 + a$.

D'après l'inégalité de Bernoulli : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad q^n \geqslant 1 + na$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + na = +\infty$ par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

EXERCICE 2

Somme de termes et récurrence **(3 points)**

1) a) $S_1 = 1{\times}2 = 2, \quad S_2 = 1{\times}2 + 2{\times}3 = 8$ et $S_3 = 1{\times}2 + 2{\times}3 + 3{\times}4 = 20$

b) $S_{n+1} = S_n + (n+1)(n+2)$.

2) **Initialisation :** $n = 1, \quad \dfrac{1(1+1)(1+2)}{3} = \dfrac{1\times2\times3}{3} = 2 = S_1$.
La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
supposons que $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$, montrons que $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$.

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)(n+2) \overset{\text{HR}}{=} \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

EXERCICE 3

Limites de suites définies explicitement **(4 points)**

1) $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$-1 \leqslant \sin n \leqslant 1 \overset{+n}{\Leftrightarrow} n-1 \leqslant n + \sin n \leqslant n+1 \overset{\div(n+2)>0}{\Leftrightarrow} \frac{n-1}{n+2} \leqslant \frac{n+\sin n}{n+2} \leqslant \frac{n+1}{n+2}$$

$$\frac{n-1}{n+2} \overset{\div n\neq 0}{=} \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} \quad \text{et} \quad \frac{n+1}{n+2} \overset{\div n\neq 0}{=} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} 1+\frac{2}{n} = 1, \text{ donc par quotient}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1, \text{ d'après le th. des gendarmes : } \lim_{n\to+\infty} \frac{n+\sin n}{n+2} = 1$$

2) $$\frac{4^n-2^n}{3^n+1} \overset{\div 4^n}{=} \frac{1-\dfrac{2^n}{4^n}}{\dfrac{3^n}{4^n}+\dfrac{1}{4^n}} = \frac{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad \text{car } -1<\frac{1}{2}<1 \text{ par somme } \lim_{n\to+\infty} 1+\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0^+ \text{ car } 0<\frac{1}{4}<\frac{3}{4}<1 \text{ par somme } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0^+.$$

Par somme et quotient : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{4^n-2^n}{3^n+1} = +\infty$

3) $$\frac{n}{5}+7-\frac{3n}{n^2+4} \overset{n\neq 0}{=} \frac{n}{5}+7-\frac{3}{n+\dfrac{4}{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{5}+7 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} n+\frac{4}{n} = +\infty \text{ donc par quotient } \lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n+\dfrac{4}{n}} = 0$$

Par somme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{5}+7-\frac{3n}{n^2+4} = +\infty$

4) $$\frac{-6n^2+3n+7}{n^2+n+1} \overset{\div n^2\neq 0}{=} \frac{-6+\dfrac{3}{n}+\dfrac{7}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}} \text{ on a } \left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -6+\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2} = -6\\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} = 1\end{array}\right\} \text{ Par quotient } \lim_{n\to+\infty}\frac{-6n^2+3n+7}{n^2+n+1} = -6$$

EXERCICE 4

Suite monotone **(4 points)**

1) **Initialisation :** $n=0$, $u_0=0$ donc $0\leqslant u_0\leqslant 4$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $0\leqslant u_n\leqslant 4$, montrons que $0\leqslant u_{n+1}\leqslant 4$

HR $0\leqslant u_n\leqslant 4 \overset{\times 3}{\Leftrightarrow} 0\leqslant 3u_n\leqslant 12 \overset{+4}{\Leftrightarrow} 4\leqslant 3u_n+4\leqslant 16$

Comme la fonction racine carrée est croissante que $\mathbb{R}_+$:

$\sqrt{4}\leqslant\sqrt{3u_n+4}\leqslant\sqrt{16} \Leftrightarrow 0\leqslant 2\leqslant u_{n+1}\leqslant 4$. La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leqslant u_n\leqslant 4$.

2) a) $u_{n+1}^2-u_n^2 = u_n+4-u_n^2 = -u_n^2+3u_n+4$

or $-(u_n+1)(u_n-4) = -u_n^2+4u_n-u_n+4 = -u_n^2+3u_n+4$

Donc $u_{n+1}^2-u_n^2 = -(u_n+1)(u_n-4)$.

b) D'après la question 1) : $\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant u_n \leqslant 4 \quad \Rightarrow \quad u_n + 1 > 0$ et $u_n - 4 \leqslant 0$

On en déduit que $\quad -(u_n+1)(u_n-4) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_{n+1}^2 - u_n \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_{n+1}^2 \geqslant u_n^2$

Comme la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $\quad u_{n+1} \geqslant u_n$

La suite (u_n) est croissante.

3) La suite (u_n) est croissante et majorée par 4, d'après le théorème des suites monotone, la suite (u_n) est convergente vers ℓ.

Ce théorème ne permet pas de déterminer la limite donc on ne peut affirmer que $\quad \ell = 4$.

On peut seulement affirmer que $\quad 0 \leqslant \ell \leqslant 4$.

4) $\sqrt{3\ell+4} = \ell \quad \overset{\uparrow 2}{\Leftrightarrow} \quad 3\ell + 4 = \ell^2 \quad \Leftrightarrow \quad -\ell^2 + 3\ell + 4 = 0 \quad \overset{2\text{ a)}}{\Leftrightarrow} \quad -(\ell+1)(\ell-4) = 0.$

$\ell = -1$ ne convient pas car $\ell \geqslant 0$, seule la solution $\ell = 4$ convient.

La suite (u_n) converge vers 4.

Exercice 5

Vrai-Faux et suite homographique **(8 points)**

Partie A

1) **Affirmation 1 : Fausse**

La fonction associée $\quad f(x) = x^2 - 42x + 4$ est une fonction du second degré convexe ($a = 1 > 0$). Elle admet un minimum au delà duquel la fonction est croissante.

Pour le déterminer : $\quad f'(x) = 2x - 42$ donc $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 42 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 21.$

On peut le vérifier : $p_{21} = 21^2 - 42\times 21 + 4 = -437$ et $p_{22} = 22^2 - 42\times 22 + 4 = -436.$

$p_{22} > p_{21}$ la suite n'est pas décroissante.

Remarque : On aurait pu utiliser l'argument suivant : si une suite est strictement décroissante, sa limite ne peut être $+\infty$. En effet comme $p_0 = 4$ et (p_n) décroissante, l'intervalle $[5\,;+\infty[$ ne contient aucun terme de la suite (p_n) et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n \neq +\infty$.

Or $\quad p_n = n^2\left(1 - \dfrac{42}{n} + \dfrac{4}{n^2}\right)$, on montre par produit que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$.

2) **Affirmation 2 : Vraie**

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 1 = \frac{1}{9}(u_n^2 + 8) - 1 = \frac{u_n^2 + 8 - 9}{9} = \frac{u_n^2 - 1}{9} = \frac{1}{9}v_n$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{9}$, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{9}$ et de premier terme $v_0 = a^2 - 1$.

3) **Affirmation 3 : Vraie**

$$n^2 \leqslant (n+1)^2\, w_n \leqslant n^2 + n \quad \overset{\div(n+1)^2}{\Leftrightarrow} \quad \frac{n^2}{(n+1)^2} \leqslant w_n \leqslant \frac{n^2+n}{(n+1)^2}$$

$$\frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2+2n+1} \overset{\div n^2}{=} \frac{1}{1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}} \quad \text{et} \quad \frac{n^2+n}{(n+1)^2} = \frac{n^2+n}{n^2+2n+1} \overset{\div n^2}{=} \frac{1 + \dfrac{1}{n}}{1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2} = 1$ par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{(n+1)^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{(n+1)^2} = 1$

D'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$.

Partie B

1) $u_1 = \dfrac{2u_0}{1+u_0} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}$

2) **Initialisation :** $n = 0$, $\dfrac{2^0}{1+2^0} = \dfrac{1}{2} = u_0$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}$, montrons que $u_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}}$

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n} \overset{\text{HR}}{=} \frac{2\times\dfrac{2^2}{1+2^n}}{1+\dfrac{2^n}{1+2^n}} \overset{\times(1+2^n)}{=} \frac{2\times 2^2}{1+2^n+2^n} = \frac{2^{n+1}}{1+2\times 2^n} = \frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}}$$

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}$

3) L'algorithme 1 donne bien la valeur de u_n. En effet dans la dernière boucle $i = n-1$, l'algorithme calcule le terme suivant u_n puis la condition n'est plus respectée et l'algorithme affiche u_n.

L'algorithme 2 **ne donne pas** la valeur de u_n mais u_{n+1}, en effet pour les valeurs de i de 0 à n, il y a $(n+1)$ valeurs donc l'algorithme effectue $(n+1)$ boucles.

L'algorithme 3 donne bien la valeur de u_n car il utilise la formule que l'on vient de montrer par récurrence.

Conclusion : Seul l'algorithme 2 ne donne pas la valeur de u_n.