Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 11 décembre 2019

EXERCICE 1

Question de cours : limites de la fonction exponentielle **(2 points)**

1) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme de fonction dérivable.
$f'(x) = e^x - 1$ donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

La fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$ donc, si $x > 0$, $f'(x) > 0$ et si $x < 0$, $f'(x) < 0$.

D'après les variations de f, on déduit :
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant 1 > 0 \Rightarrow e^x > x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} x = 0$ donc
par comparaison $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

En $-\infty$, on pose $X = -x$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^X} \overset{\text{par quotient}}{=} 0$

EXERCICE 2

Équation, inéquation **(2 points)**

1) $e^2 \times e^{x^2} = e^{2x^2+x} \Leftrightarrow e^{x^2+2} = e^{2x^2+x} \overset{\text{exp monotone sur } \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} x^2+2 = 2x^2+x \Leftrightarrow x^2+x-2 = 0.$

$x_1 = 1$ racine évidente, $P = -2$ donc $x_2 = -2$. On a $S = \{-2\,;\,1\}$.

2) $e^{2x-3} \geqslant e^{3x} \overset{\text{exp croissante sur } \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} 2x-3 \geqslant 3x \Leftrightarrow -x \geqslant 3 \Leftrightarrow x \leqslant -3 \Leftrightarrow S =]-\infty\,;-3]$

EXERCICE 3

Limite et dérivée. **(3 points)**

1) En $-\infty$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x + 1 = 1 \end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

2) En $+\infty$, on change la forme : $f(x) \overset{\div e^x}{=} \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{e^x}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ par somme et quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

3) a) La fonction f est dérivable que $\mathbb{R}$ par opération de fonctions dérivables.

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x \times e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$. On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0 ↗	$\frac{1}{2}$ ↗	1

EXERCICE 4

Taux de vasopressine **(9 points)**

1) a) $f(0) = 3 \times 0 \times e^0 + 2 = 2.$

Le taux de vasopressine dans le sang à l'instant $t = 0$ est de 2 μg/mL.

b) $12 \text{ s} = \dfrac{12}{60} = \dfrac{1}{5} = 0,2$ min. $f(0.2) = 3 \times 0,2 \times e^{-\frac{0.2}{4}} + 2 \approx 2,57.$

Le taux de vasopressine dans le sang est supérieur à 2,5 μg/mL, il est donc anormal.

c) On pose $T = \dfrac{t}{4}$, on a donc : $3t \times e^{-\frac{t}{4}} = 3 \times 4T\, e^{-T} = 12 \times \dfrac{T}{e^T}$.

si $t \to +\infty$ alors $T \to +\infty$

$\displaystyle\lim_{T\to+\infty} \frac{e^T}{T} = +\infty$ donc par quotient et produit $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} 12 \times \frac{T}{e^T} = 0.$

Par somme $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} 12 \times \frac{T}{e^T} + 2 = \lim_{t\to+\infty} f(t) = 2.$

On peut dire après un temps suffisamment long, le taux de vasopressine dans le sang, après une hémorragie, redevient normal : celui d'avant l'hémorragie.

2) $f'(t) = 3\,e^{-\frac{t}{4}} + 3t \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) e^{-\frac{t}{4}} = 3 \times e^{-\frac{t}{4}} \left(1 - \dfrac{t}{4}\right) = \dfrac{3}{4}(4-t)\, e^{-\frac{t}{4}}.$

3) a) $f'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 4$ car $\forall t \in [0\,;+\infty[,\ e^{-\frac{t}{4}} > 0.$

Signe $f(x)$ = signe $(4-t)$. On obtient le tableau de variation suivant :

x	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	2 ↗	$\approx 6{,}41$	↘ 2

b) Le taux de vasopressine est maximal au bout de 4 minutes. Le taux de vasopressine est alors de $f(4) = 3 \times 4 \times e^{-1} + 2 \approx 6,41$ μg/mL à 10^{-2} près.

4) a) Sur $[0\,,\,4]$

- f est continue car dérivable,
- f est monotone (croissante)
- 2,5 est compris entre $f(0) = 2$ et $f(4) \approx 6,41$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2,5$ admet une unique solution t_0 sur $[0\,,\,4]$.

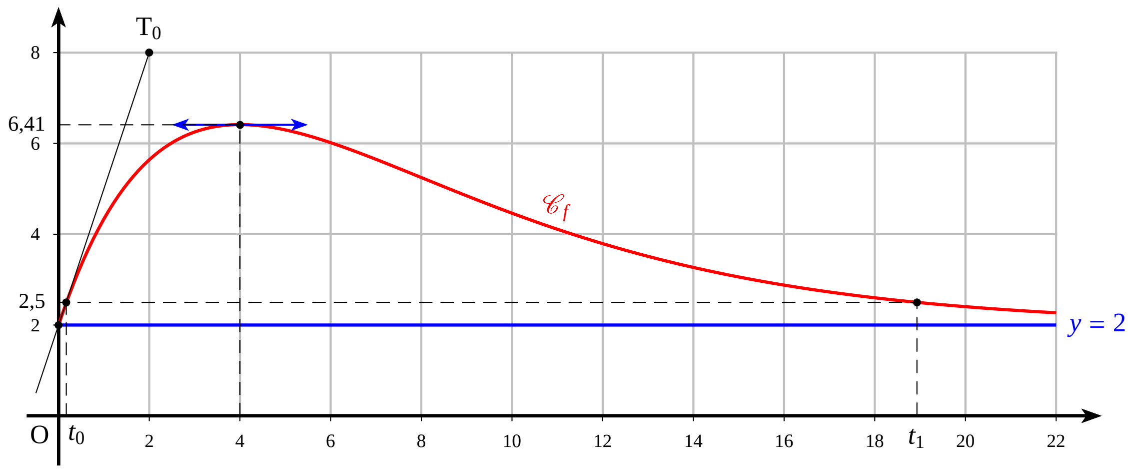
Avec le algorithme de dichotomie, on a après 12 itérations : $0,174 < t_0 < 0,175$

⚠ il faut rentrer la fonction $f(x) - 2,5 = 3x\,e^{-\frac{x}{4}} - 0,5.$

b) D'après les variations de f, le taux de vasopressine reste supérieur à 2,5 μg/mL dans le sang pendant $T \approx 18,930 - 0,174 \approx 18,756 \approx 18$ min. et 45 s.

5) a) $\mathrm{T}_0\ :\ y = f'(0)t + f(0) \quad\Leftrightarrow\quad y = 3x + 2.$

b) On obtient la courbe suivante en plaçant les points (0,17 , 2,5) et (18,93 , 2,5) qui correspondent aux instants t_0 et t_1 où le taux est de 2,5 μg/mL.
Pour T_0, on peut prendre les points (0,2) et (2, 8).



Exercice 5

Chaînette **(4 points)**

1) $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(-x) = \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2}\left(e^{-x} + e^{x}\right) = f(x).$

La fonction f est paire donc $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2) $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} -x = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0 \end{array}\right\}$ par composition $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$

Par somme et produit : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$

Par symétrie de la fonction paire : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$

3) $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$. D'où $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{x} = e^{-x} \;\Leftrightarrow\; x = -x \;\Leftrightarrow\; x = 0.$

$f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) > 0 \;\Leftrightarrow\; e^{x} - e^{-x} < 0 \;\Leftrightarrow\; e^{x} < e^{-x} \;\Leftrightarrow\; x < -x \;\Leftrightarrow\; x < 0.$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

$f(0) = \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2}(1+1) = \dfrac{5}{2}.$

4) Sur $[0\ ; +\infty[$, la fonction f est continue (car dérivable), monotone (croissante) et change de signe car $f(0) = \dfrac{5}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet un unique solution α.

Par symétrie de $\mathscr{C}_f$ on déduit que $-\alpha$ est aussi solution de $f(x) = 0$ sur $]-\infty\,,\ 0]$.
L'équation $f(x) = 0$ admet donc exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$ et ces solutions sont opposées.

Pour information : $\alpha = 1,925$ à 10^{-3}.