# Contrôle de mathématiques

## Lundi 16 mars 2020

## EXERCICE 1

**Primitives** **(5 points)**

1) Déterminer une primitive pour les fonctions suivantes sur l'intervalle I proposé. On indiquera clairement la forme utilisée pour déterminer la primitive.

   a) $f(x) = \dfrac{2e^x}{e^x + 3}$ , $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

   b) $g(x) = \dfrac{5}{(2x-1)^3}$ , $\quad \mathrm{I} = \left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$

   c) $h(x) = \dfrac{1}{x}\ln x$ , $\quad \mathrm{I} = ]0\,;+\infty[$

2) Soit la fonction $f$ définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2-1)}$

   a) Montrer que : $f(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2(x-1)} + \dfrac{1}{2(x+1)}$

   b) En déduire une primitive de $f$ sur $]1\,;+\infty[$

## EXERCICE 2

**Aire** **(6 points)**

### Partie A

Soit $f$ la fonction définie sur $[-1\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = (x+1)\,e^{-0.5x}$.

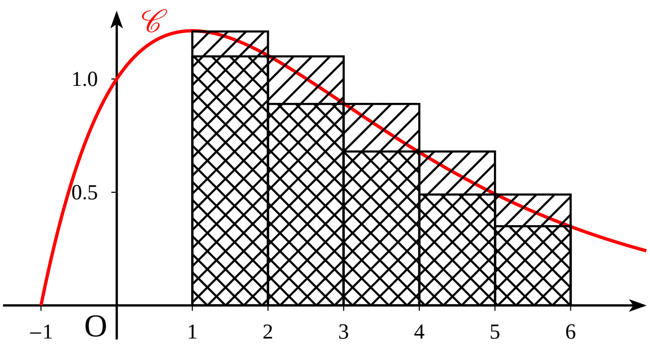
1) Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

2) Calculer $f'(x)$ puis déterminer les variations de $f$ sur $[-1\,;\,+\infty[$.

### Partie B

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$. Soit $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 6$. L'algorithme suivant permet calculer, par la méthode des rectangles, une valeur approchée de $\mathscr{A}$.

**Entrées et initialisation**
  $0 \to u$ , $0 \to v$
  $5 \to n$
**Traitement**
  **pour** $k$ allant de 0 à $(n-1)$ **faire**
    $u + f(1+k) \to u$
    $v + f(1+(k+1)) \to v$
  **fin**
**Sorties :** Afficher $u$, $v$



1) Que représentent $u$ et $v$ sur le graphique précédent ? On se justifiera clairement.
2) Rentrer cet algorithme dans la calculatrice puis donner un encadrement de $\mathscr{A}$.

**Partie C**

Soit $F$ la fonction dérivable, définie sur $[-1\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = (-2x-6)\,e^{-0,5x}$.

1) Montrer que $F$ est une primitive de $f$ sur $[-1\ ;\ +\infty[$.
2) Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$.

## EXERCICE 3

**Suite et intégrale** **(6,5 points)**

On considère la suite $(I_n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{1-x}\,\mathrm{d}x$.

1) Montrer que la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-1-x)\,e^{1-x}$ est une primitive de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,e^{1-x}$.
2) En déduire que $I_1 = e - 2$.
3) On admet que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.
   a) Utiliser cette formule pour calculer $I_2$.
   b) Écrire un algorithme permettant de calculer $I_n$, $n$ étant donné. Donner une valeur approchée à $10^{-3}$ de $I_{15}$ puis conjecturer la limite de la suite $(I_n)$.
4) a) Justifier que, pour $x \in [0\ ;\ 1]$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leqslant x^n\,e^{1-x} \leqslant x^n\,e$.
   b) En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$.
   c) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

## EXERCICE 4

**Valeur moyenne** **(2,5 points)**

Soit la fonction $f$ définie sur $I = [0\ ;\ 16]$ par : $f(x) = 3x\,e^{-\frac{1}{4}x} + 2$

1) Soit la fonction $F$ définie sur $I$ par $F(x) = -12(x+4)\,e^{-\frac{1}{4}x} + 2x$.
   Montrer que $F$ est une primitive de $f$ sur $I$.
2) Déterminer la valeur exacte puis une approximation à $10^{-2}$ de la valeur moyenne de $f$ sur $I$.