Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 16 mars 2020

EXERCICE 1

Primitives **(5 points)**

1) a) $f(x) = \dfrac{2e^x}{e^x+3} = 2 \times \dfrac{e^x}{e^x+3} = 2 \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = e^x + 3$

$F(x) = 2\ln|u(x)| = \ln(e^x+3)$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x + 3 > 0$

b) $g(x) = \dfrac{5}{(2x-1)^3} = \dfrac{5}{2} \times \dfrac{2}{(2x-1)^3} = \dfrac{5}{2} \times \dfrac{u'(x)}{u^3(x)}$ avec $u(x) = 2x - 1$

$F(x) = \dfrac{5}{2} \times \dfrac{-1}{2u(x)} = \dfrac{-5}{4(2x-1)^2}$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x}\ln x = u'(x)u(x)$ avec $u(x) = \ln x$

$F(x) = \dfrac{1}{2}u^2(x) = \dfrac{1}{2}\ln^2 x$

2) a) $-\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2(x-1)} + \dfrac{1}{2(x+1)} = \dfrac{-2(x-1)(x+1) + x(x+1) + x(x-1)}{2x(x-1)(x+1)} = \dfrac{-2x^2 + 2 + x^2 + x + x^2 - x}{2(x^2-1)}$

$= \dfrac{2}{2(x^2-1)} = f(x)$

b) $F(x) = -\ln x + \dfrac{1}{2}\ln|x-1| + \dfrac{1}{2}\ln|x+1| = -\ln x + \dfrac{1}{2}\ln(x-1) + \dfrac{1}{2}\ln(x+1)$

car $\forall x > 1,\ x - 1 > 0$ et $x + 1 > 0$.

EXERCICE 2

Aire **(6 points)**

Partie A

1) $f(x) = x\,e^{-0,5x} + e^{-0,5x} = -2(-0,5xe^{-0,5x}) + e^{-0,5x}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} -0.5x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \end{array}\right\}$ Par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} -0,5xe^{-0.5x} = 0$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} -0.5x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{array}\right\}$ Par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0.5x} = 0$

Par produit et somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2) $f'(x) = 1 \times e^{-0,5x} + (x+1)(-0,5)e^{-0,5x} = e^{-0,5x}(1 - 0,5x - 0,5) = (-0,5x + 0,5)e^{-0,5x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,5x + 0,5 = 0\ \ x = 1$ et signe de $f'(x)$ = signe de $(-0,5x + 0,5)$

x	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2e^{-0,5}$	$\searrow$	0

Partie B

1) u représente l'aire des rectangles de valeurs supérieures et v celle des rectangles de valeurs inférieures. On a donc $v \leqslant \mathscr{A} \leqslant u$.

2) En faisant tourner le programme, on trouve : $3,51 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 4,37$.

Partie C

1) $F'(x) = -2e^{-0,5x} + (-2x-6)(-0,5)e^{-0,5x} = e^{-0,5x}(-2+x+3) = (x+1)e^{-0,5x} = f(x)$

F est donc une primitive de f sur $[-1\,;+\infty[$.

2) $\mathscr{A} = \big[F(x)\big]_1^6 = F(6) - F(1) = -18e^{-3} - (-8)e^{-0,5} = 8e^{-0,5} - 18e^{-3} \approx 3,96$.

Exercice 3

Suite et intégrale **(6,5 points)**

1) $F'(x) = -1\,e^{1-x} + (-1-x)(-1)\,e^{1-x} = e^{1-x}(-1+1+x) = x\,e^{1-x} = f(x)$

F est donc une primitive f sur $\mathbb{R}$.

2) $I_1 = \big[F(x)\big]_0^1 = F(1) - F(0) = -2e^0 - (-1)e^1 = e - 2$.

3) a) Pour $n=1$, on a : $I_2 = 2I_1 - 1 = 2e - 4 - 1 = 2e - 5$.

b) On peut proposer l'algorithme suivant :

On trouve $I_{15} \approx 0,07$

On peut conjecturer que la suite (I_n) tend vers 0.

Entrées et initialisation
  Lire N
  $e - 2 \to I$
Traitement
  pour k allant de 2 à N **faire**
    $kI - 1 \to I$
  fin
Sorties : Afficher I

4) a) $0 \leqslant x \leqslant 1 \;\Leftrightarrow\; -1 \leqslant -x \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; 0 \leqslant 1-x \leqslant 1 \;\overset{\exp\nearrow}{\Leftrightarrow}\; e^0 \leqslant e^{1-x} \leqslant e^1$

$\overset{\times x^n \geqslant 0}{\Leftrightarrow} \; 0 \leqslant x^n \leqslant x^n\,e^{1-x} \leqslant x^n\,e$.

b) En intégrant l'inégalité, on obtient :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n\,e\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; 0 \leqslant I_n \leqslant e\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \;\Leftrightarrow\; 0 \leqslant I_n \leqslant e\left(\frac{1}{n+1} - 0\right)$$

$$\Leftrightarrow\; 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ d'après le théorème des gendarmes $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

EXERCICE 4

Valeur moyenne **(2,5 points)**

1) $F'(x) = -12\,e^{-\frac{1}{4}x} + (-12)(x+4)\left(-\dfrac{1}{4}\right)\,e^{-\frac{1}{4}x} + 2 = e^{-\frac{1}{4}x}(-12 + 3x + 12)$

$= 3x\,e^{-\frac{1}{4}x} + 2 = f(x)$.

F est donc une primitive de f sur I.

2) Soit μ la valeur moyenne de f sur I.

$$\mu = \frac{1}{16-0}\int_0^{16} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}\Big[F(x)\Big]_0^{16} = \frac{1}{16}\,[F(16) - F(0)]$$

$$= \frac{1}{16}\left[-12\times 20\,e^{-4} + 32 - (-12\times 4\,e^{0} + 0)\right] = \frac{1}{16}(80 - 240\,e^{-4})$$

$$= 5 - 15e^{-4} \approx 4,73$$