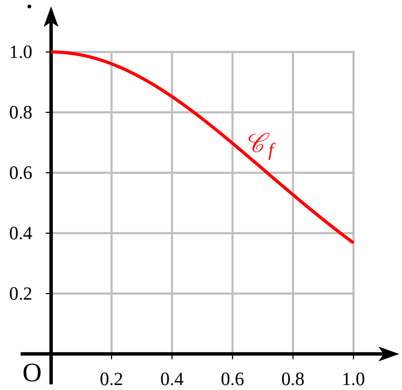
Devoir à rendre pour le jeudi 7 mai 2020

EXERCICE I

Méthode de Monte-Carlo **(4 point)**

On donne la fonction f définie sur $I = [0\,;\,1]$ par : $f(x) = e^{-x^2}$.



On donne sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$.

1) Pourquoi la fonction f admet une primitive sur I ?

2) On choisit la primitive F telle que $F(0) = 0$.
   Justifier graphiquement que $F(1) \leqslant 0,88$

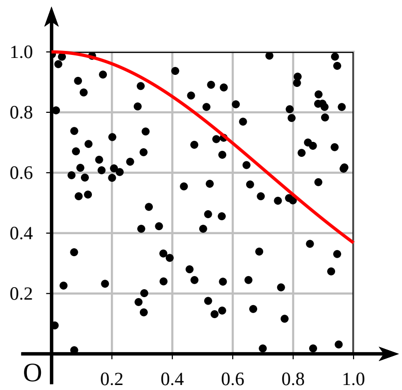
On ne connaît pas d'expression de la primitive F à l'aide de fonctions de référence. On décide alors pour calculer $F(1)$ d'utiliser la méthode Monte-Carlo

On note E l'ensemble des points M situés entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. La méthode est décrite ci-dessous :

- On choisit un point M$(x\,;\,y)$ en tirant au hasard de façon indépendante ses coordonnées x et y selon la loi uniforme sur l'intervalle I. On admet que la probabilité que le point M appartienne à l'ensemble E est égale à $F(1)$.
- On répète n fois l'expérience du choix d'un point M au hasard. On compte le nombre c de points appartenant à l'ensemble E parmi les n points obtenus.
- La fréquence $f = \dfrac{c}{n}$ est une estimation de la valeur de $F(1)$.

On donne l'algorithme qui utilise la méthode de Monte-Carlo pour déterminer une valeur du nombre f et le graphique illustrant cette méthode.

Lire n
$c \leftarrow 1$
pour i de 1 à n **faire**
  $x \leftarrow ALEA$
  $y \leftarrow ALEA$
  si $y \leqslant \ldots$ **alors**
    $c \leftarrow \ldots$
  fin
fin
Sorties : Afficher "f" , ...



3) Recopier et compléter cet algorithme.
   ALEA est une fonction qui génère aléatoirement un nombre compris entre 0 et 1.
   On rentre $n = 100$. Donner la valeur de f.
   Déterminer la valeur f correspondant au graphique.

4) Une exécution de l'algorithme pour $n = 1\,000$ donne $f = 0,757$.
   En déduire un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la valeur exacte de $F(1)$.

Exercice II

Loi exponentielle **(6 points)**

Tous les résultats seront donnés à à 10^{-3} près.

1) La durée, en heures, de fonctionnement sans panne d'un composant électronique est modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

   La durée moyenne de fonctionnement sans panne de ce composant électronique, soit l'espérance mathématique de X, est de 1250 heures.

   a)) Justifier que $\lambda = 8 \times 10^{-4}$.

   b)) Calculer la probabilité que ce composant électronique n'ait connu aucune panne pendant les 1000 premières heures.

   c)) Sachant que ce composant électronique n'a connu aucune panne pendant les 1000 premières heures, quelle est la probabilité qu'il n'en connaisse aucune jusqu'à la 1500^{e} heure ? Justifier.

   d)) On decide de remplacer ce composant électronique au bout d'un temps t, exprimé en heures, qui vérifie que la probabilité de l'évènement $(X > t)$ est égale à $0,05$.

   Déterminer la valeur de t arrondie à l'entier.

2) La durée de vie X, en année d'une carte mère d'un ordinateur suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On appelle demi-vie de X le réel t tel que $p(X \leqslant t) = p(X \geqslant t)$.

   a) Démontrer $p(X \leqslant t) = \dfrac{1}{2}$ puis montrer que $t = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$.

   b) On observe que la demi-vie d'une carte mère est de 10 ans. Déterminer $p(X \leqslant 6)$.

   c) Quelle est la probabilité que la durée du vie d'une carte mère soit supérieure à 15 ans ?

Exercice III

Loi normale **(4 points)**

Tous les résultats seront donnés à à 10^{-3} près.

1) Un boulanger fabrique des baquettes dont la taille T, en gramme, suit une loi normale d'espérance 200. Il affirme que 95 % de ses baguettes font entre 190 et 210 grammes.

   a) Déterminer, sans calculatrice, une valeur approchée de l'écart-type σ. On se justifiera.

   b) Déterminer, sans calculatrice, la probabilité d'avoir une baguette qui pèse moins de 190 g. On se justifiera.

   c) Quelle est la probabilité d'avoir deux jours d'affilée une baguette qui pèse moins de 190 g ?

2) Des sachets sont remplis de poudre par une machine. On pose une étiquette sur chaque sachet, indiquant qu'il contient 100 grammes de poudre. On observe que la masse m d'un sachet suit une loi normale d'écart-type $\sigma = 2$. La valeur de l'espérance μ, dépend du réglage de la machine.

   Sur quelle valeur de μ faut-il régler la machine pour que 99 % des sachets aient une masse supérieure à 100 g ?

Exercice IV

Approximation normale **(4 points)**

Paul prend le bus 600 fois par an. Il veut savoir s'il est intéressant de ne jamais acheter de ticket. Un ticket coûte 1,60 € et une amende 40 €. À chaque voyage, la probabilité d'être contrôlé est de 0,045. On note X la variable aléatoire égale au nombre de contrôle sur une année.

1) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
2) Justifier que cette loi binomiale peut être approchée par une loi normale dont on précisera les paramètres.
3) A l'aide de l'approximation normale, répondre à la question que se pose Paul.

Exercice V

Statistiques et estimation **(2 points)**

Depuis plusieurs années, les associations distribuant des produits frais à leurs adhérents se développent dans tout le pays et connaissent un succès grandissant.
Lors d'une émission de radio consacrée à ce sujet, un journaliste annonce que 88 % des adhérents de ces associations sont satisfaits.
Un auditeur intervient dans l'émission pour contester le pourcentage avancé par le journaliste. à l'appui de son propos, l'auditeur déclare avoir réalisé un sondage auprès de 120 adhérents de ces associations et avoir constaté que, parmi eux, seuls 100 ont indiqué être satisfaits. La contestation de l'auditeur est-elle fondée ?
On justifiera précisément la réponse.