Correction du devoir pour le jeudi 7 mai 2020

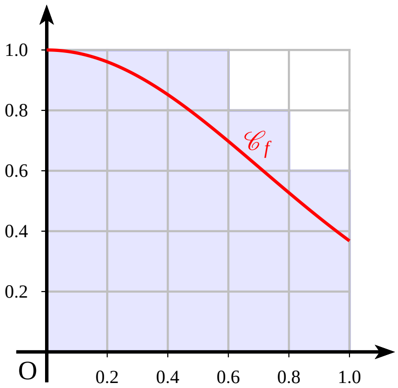
EXERCICE I

Méthode de Monte-Carlo **(4 point)**

1) La fonction f est continue par composition de fonctions continues sur I donc d'après le théorème fondamental de l'intégration, la fonction f admet une primitive.

2) On appelle $\mathscr{A}$ l'aire, en u.a., sous la courbe entre les abscisses 0 et 1.

   On a $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) \overset{F(0)=0}{=} F(1) = \mathscr{A}$.



   On détermine un majorant de $\mathscr{A}$ en incluant la courbe $\mathscr{C}_f$ dans une aire constituée d'un nombre de carreaux entier.

   $\mathscr{A}$ est majorée par 22 carreaux de $0,2^2 = 0,04$ d'unité d'aire donc

   $$\mathscr{A} \leqslant 22 \times 0,04 = 0,88$$

   On en déduit donc que $F(1) \leqslant 0,88$

3) On a l'algorithme suivant :
   La valeur que l'on trouve f après exécution du programme se trouve dans un intervalle de fluctuation $I_{100} = [0,661\ ;\ 0;832]$.

   Par exemple : $f_1 = 0,69,\ \ f_2 = 0,76,\ \ f_3 = 0,71, \dots$

   Pour la valeur de f sur le graphique, on peut compter le points n à l'extérieur de l'aire puis par complément à 100 en déduire le nombre de point dans l'aire.

   On trouve $n = 27$ donc $f = \dfrac{100-27}{100} = 0,73$

```
Lire n
c ← 0
pour i de 1 à n faire
    x ← ALEA
    y ← ALEA
    si y ⩽ e^(−x²) alors
        c ← c + 1
    fin
fin
Sorties : Afficher "f" , c/n
```

4) On déduit l'intervalle de confiance, les conditions de l'approximation normale étant vérifiée, au niveau 95 % : $I_c = \left[f_{\text{obs}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f_{\text{obs}} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$

   $I_c = \left[0,757 - \dfrac{1}{\sqrt{1000}}\ ;\ 0,757 + \dfrac{1}{\sqrt{1000}}\right] = [0,725\ ;\ 0,789]$.

   Si on calcule l'intégrale avec la calculatrice, on trouve : $F(1) \approx 0,746\,824$

EXERCICE II

Loi exponentielle **(6 points)**

1) a) $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} \quad\Leftrightarrow\quad \lambda = \dfrac{1}{E(X)} = \dfrac{1}{1250} = 8 \times 10^{-4}$.

b) $p(X \geqslant 1000) = e^{-1000\lambda} = e^{-0.8} \approx 0,449$

c) La loi exponentielle étant une loi sans mémoire, on a :
$p_{X\geqslant 1000}(X \geqslant 1500) = p(X \geqslant 500) = e^{-500\lambda} = e^{-0,4} \approx 0,670.$

d) $p(X > t) = 0,05 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\lambda t} = 0,05 \quad \overset{\ln}{\Leftrightarrow} \quad -\lambda t = \ln 0,05 \quad \Leftrightarrow$
$t = -\dfrac{\ln 0,05}{\lambda} = -1250 \ln 0,05 \approx 3\,745$ heures

2) a) $p(X \leqslant t) + p(X \geqslant t) = 1 \quad \overset{p(X\leqslant t)=p(X\geqslant t)}{\Leftrightarrow} \quad 2p(X \leqslant t) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad p(X \leqslant t) = \dfrac{1}{2}$

$p(X \leqslant t) = \dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - e^{-\lambda t} = \dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\lambda t} = \dfrac{1}{2} \quad \overset{\ln}{\Leftrightarrow} \quad -\lambda t = \ln \dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda t = \ln 2$

$\Leftrightarrow \quad t = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$

b) $\dfrac{\ln 2}{\lambda} = 10 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \dfrac{\ln 2}{10}$ d'où $\quad p(X \leqslant 6) = 1 - e^{-6\lambda} = 1 - e^{-0.6 \ln 2} \approx 0,340$

c) $p(X \geqslant 15) = e^{-15\lambda} = e^{-1.5 \ln 2} \approx 0,354$

Exercice III

Loi normale **(4 points)**

1) a) L'intervalle centrée à 95 % est à connaître, il vaut à peu près (en réalité, il y a un facteur de 1,96), $I_{95} \approx [\mu - 2\sigma \,;\, \mu + 2\sigma]$.

On en déduit donc que : $\sigma \approx \dfrac{210 - 200}{2} \approx 5.$

b) La courbe densité de la loi normale est symétrique par rapport à la droite $x = \mu$.
On a donc en appelant X la variable aléatoire associée au poids d'une baguette :

$p(X \leqslant 190) = p(X \geqslant 210)$ et $\quad p(X \leqslant 190) + p(X \geqslant 210) = 1 - p(190 \leqslant X \leqslant 210)$

donc $p(X \leqslant 190) = \dfrac{1 - p(190 \leqslant X \leqslant 210)}{2} = \dfrac{1 - 0,95}{2} = 0,025$

c) En supposant que l'on répète deux jours de suite l'expérience, on achète une baguette chez le boulanger, de façon identique et **indépendante**, la probabilité d'avoir une baguette deux fois fois de suite pesant moins de 190 g vaut :

$p = 0,025^2 = (2.5 \times 10^{-2})^2 = 6,25 \times 10^{-4}.$

2) Soit m, la variable aléatoire associée à la masse d'un sachet. Comme on ne connaît pas μ, on revient à la loi normale centrée réduite.

On pose : $Z = \dfrac{m - \mu}{\sigma} = \dfrac{m - \mu}{2}$. On a alors :

$p(m > 100) = 0,99 \quad \Leftrightarrow \quad p\left(Z > \dfrac{100-\mu}{2}\right) = 0,99 \quad \Leftrightarrow \quad p\left(Z \leqslant \dfrac{100-\mu}{2}\right) = 1 - 0,99 = 0,01$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{100-\mu}{2} = \Phi^{-1}(0,01) \quad \Leftrightarrow \quad 100 - \mu = 2\Phi^{-1}(0,01) \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 100 - 2\Phi^{-1}(0,01)$

$\mu \approx 104,653$. On réglera la machine sur 104,653 au mg près.

EXERCICE IV

Approximation normale **(4 points)**

1) On répète 600 fois l'expérience consistant à prendre le bus sans ticket dont la probabilité d'être contrôlé est $p = 0,045$. Si on admet que ces expériences sont indépendantes et identiques et si on appelle X le nombre de contrôles sur une année, alors X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(600\ ;\ 0,045)$.

2) On vérifie les conditions de l'approximation normale :
$n = 600 \geqslant 30$, $np = 27 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 573 \geqslant 5$.

$\mathscr{B}(600\ ;\ 0,045)$ peut être approchée par $\mathscr{N}(np\ ;\ \sqrt{np(1-p)}^{\,2}) = \mathscr{N}(27\ ;\ 5,08^2)$.

3) Si Paul avait acheté des tickets, il aurait payé : $600 \times 1,6 = 960$ €. Cette somme correspond à $\dfrac{960}{40} = 24$ contrôles.

Avec la correction du continu :
$p(X \leqslant 24) = p_N(X \leqslant 24,5) = \text{normalFrép}(-1\text{E}99, 24.5, 27, 5.08) \approx 0,311$

Sans la correction du continu (beaucoup moins précis)
$p(X \leqslant 24) = p_N(X \leqslant 24) = \text{normalFrép}(-1\text{E}99, 24, 27, 5.08) \approx 0,277$

La probabilité de 31,1 % n'est pas suffisante pour dire qu'il est plus avantageux de voyager sans payer. Paul a donc tort. La morale est sauve.

EXERCICE V

Statistiques et estimation **(2 points)**

Soit p la probabilité des personnes satisfaites. Doit-on remettre en cause $p = 0,88$?

Soit X la variable aléatoire associée au nombre de personnes de l'échantillon de 120 personnes. Si le sondage est bien fait, X vérifie la loi binomiale $\mathscr{B}(120\ ;\ 0,88)$.

Vérifions que l'on est dans les conditions de l'approximation normale :
$n = 120 \geqslant 30$, $np = 105,6 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 14,5 \geqslant 5$.

On peut déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % :

$$I_{120} = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = [0,821\ ;\ 0,938]$$

On calcule la fréquence observée : $f_{\text{obs}} = \dfrac{100}{120} \approx 0,833$.

$f_{\text{obs}} \in I_{120}$. Ce sondage ne permet pas de remettre en cause les 88 % de satisfaits.