Lycée d'Adultes de la ville de Paris | **Mercredi 19 février 2020**

BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

OBLIG. ET SPÉ

Durée de l'épreuve : 2 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 7 ou 9

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

EXERCICE 1 (10 points)

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x+1}{x+1}\right)$.

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

Partie A

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.

2) a) Démontrer que, pour tout nombre réel x positif ou nul : $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)(3x+1)}$.

   b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Sur l'annexe, placer sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1 et u_2 et conjecturer la monotonie et la convergence de la suite (u_n) dont on donnera une évaluation de la limite ℓ si besoin.

2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

3) Démontrer que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.

Partie C

On note ℓ la limite de la suite (u_n).
L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de ℓ.
On introduit pour cela la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

1) Justifier tous les élément du tableau de variation de la fonction g ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction g en $+\infty$ que l'on admet.

x	0		x_0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g(x_0)$	$\searrow$	$-\infty$

   où $x_0 \approx 0,215$ et $g(x_0) \approx 0,088$, en arrondissant à 10^{-3}.

2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α strictement positive.

3) a) Recopier et compléter l'algorithme ci-contre afin que la dernière valeur prise par la variable x soit une valeur approchée de α par excès à $0,01$ près.

```
Entrées et initialisation
  | x ← 3
Traitement
  | tant que ...... faire
  |   | x ← x − 0,01
  | fin
Sorties : Afficher x
```

   b) Donner alors la dernière valeur prise par la variable x lors de l'exécution de l'algorithme.

4) Démontrer que α correspond à la limite ℓ de la suite (u_n) puis en donner une valeur approchée à 0,01 près vérifiant ainsi la conjecture de la partie B.

EXERCICE 2 (10 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Le but de cet exercice est de déterminer les nombres complexes z non nuls tels que les points d'affixes 1, z^2 et $\frac{1}{z}$ soient alignés.
Sur le graphique fourni en annexe, le point A a pour affixe 1.

Partie A : étude d'exemples

1) **Un premier exemple**
Dans cette question, on pose $z = i$.

a) Donner la forme algébrique des nombres complexes z^2 et $\frac{1}{z}$.

b) Placer les points N_1 d'affixe z^2, et P_1 d'affixe $\frac{1}{z}$ sur le graphique donné en annexe.
Les points A, N_1 et P_1 sont-ils alignés ?

2) **Une équation**
Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $z^2 + z + 1 = 0$.

3) **Un deuxième exemple**
Dans cette question, on pose : $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Déterminer la forme exponentielle de z, puis celles des nombres complexes z^2 et $\frac{1}{z}$.

b) Placer les points N_2 d'affixe z^2 et P_2, d'affixe $\frac{1}{z}$ sur le graphique donné en annexe.
Les points A, N_2 et P_2 sont-ils alignés ?

Partie B : cas général

Soit z un nombre complexe non nul.
On note N le point d'affixe z^2 et P le point d'affixe $\frac{1}{z}$.

1) Établir que, pour tout nombre complexe différent de 0, on a :

$$z^2 - \frac{1}{z} = \left(z^2 + z + 1\right)\left(1 - \frac{1}{z}\right).$$

2) En déduire que, pour $z \neq 0$, les points A, N et P définis ci-dessus sont alignés **si et seulement si** $z^2 + z + 1$ est un réel.

3) On pose $z = x + iy$, où x et y désignent des nombres réels.
Justifier que : $z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y)$.

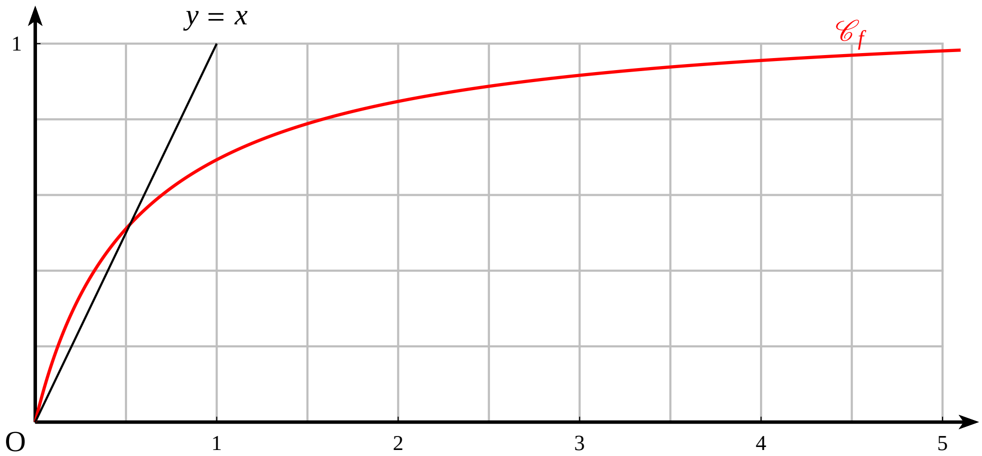
4) a) Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe $z \neq 0$ tels que les points A, N et P soient alignés.

b) Tracer cet ensemble (E) de points sur le graphique donné en annexe.

Nom :

Prénom :

Annexe exercice 1 (à rendre avec la copie)



Annexe exercice 2 (à rendre avec la copie)