BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 2 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 7 ou 9

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

EXERCICE 1 (10 points)

Partie A

1) $\dfrac{3x+1}{x+1} \overset{\div x}{=} \dfrac{3+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$ on a alors $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 3 \\ \displaystyle\lim_{x\to 3} \ln x = \ln 3\end{array}\right\}$ Par composition $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 3$

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = \ln 3$

2) a) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 3x+1>0$ et $x+1>0 \Rightarrow f(x) = \ln(3x+1) - \ln(x+1)$.

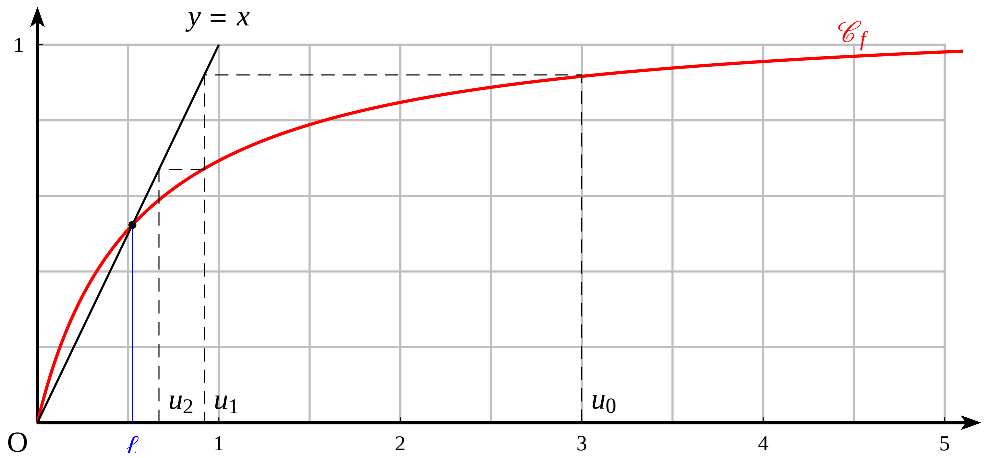
On a alors : $f'(x) = \dfrac{3}{3x+1} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{3x+3-3x-1}{(x+1)(3x+1)} = \dfrac{2}{(x+1)(3x+1)}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x+1>0$ et $3x+1>0 \Rightarrow f'(x)>0$. La fonction f est croissante.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 ↗	$\ln 3$

Partie B

1) On obtient le graphique suivant :



Conjecture : La suite (u_n) est décroissante et convergente vers 0,5.

2) **Initialisation :** $n=0$, on a $u_0 = 3$ et $u_1 = \ln\left(\dfrac{5}{2}\right) \approx 0,916$ donc $\dfrac{1}{2} \leqslant u_1 \leqslant u_0$.

La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$, montrons que $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.

HR : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$, comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$.

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{5}{3}\right) \approx 0,536 > \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$. La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

3) La suite (u_n) est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$, donc d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) est convergente vers $\ell \geqslant \frac{1}{2} > 0$.

Partie C

1) $g'(x) = f'(x) - 1 = \dfrac{2}{(x+1)(3x+1)} - 1 = \dfrac{2 - 3x^2 - x - 3x - 1}{(x+1)(3x+1)} = \dfrac{-3x^2 - 4x + 1}{(x+1)(3x+1)}$.

- $g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3x^2 - 4x + 1 = 0$, $\Delta = 16 + 12 = 28 = \left(2\sqrt{7}\right)^2$, la racine positive est :
$$x_0 = \frac{4 - 2\sqrt{7}}{-6} = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3} \approx 0,215$$
- Le signe de $g'(x)$ est le signe de $-3x^2 - 4x + 1$ donc négatif à l'extérieur des racines et positif à l'intérieur. Donc $g'(x) > 0$ si $x \in [0, x_0[$ et $g'(x) < 0$ si $x \in]x_0, +\infty[$.

$g(0) = f(0) - 0 = 0$ et $g(x_0) \approx f(0,215) - 0,215 \approx 0,088$

2) Sur $]0, x_0[$, $g(x) > 0$ donc $g(x)$ ne peut d'annuler.

Sur $[x_0, +\infty[$, la fonction g est :
- continue car dérivable,
- monotone (décroissante)
- et change de signe $g(x_0) > 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha > 0$

3) a) On obtient :

Entrées et initialisation
$x \leftarrow 3$
Traitement
tant que $\ln\left(\dfrac{3x+1}{x+1}\right) - x > 0,01$ **faire**
$x \leftarrow x - 0,01$
fin
Sorties : Afficher x

b) On trouve : $x \approx 0.52$

4) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et la suite (u_n) est convergente vers ℓ, donc d'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie l'équation $f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = 0$.
On a donc $\ell = \alpha \approx 0,52$.

EXERCICE 2 (10 points)

Partie A : étude d'exemples

1) **Un premier exemple**

a) $z^2 = -1$ et $\dfrac{1}{z} = -i$.

b) Le graphique est à la fin. Les points A, N_1 et P_1 ne sont pas alignés.

2) **Une équation**
$z^2 + z + 1 = 0$. $\Delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$. $\Delta < 0$, l'équation admet deux racines complexes conjuguées.
$$z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

3) **Un deuxième exemple**

a) $|z| = \dfrac{\sqrt{1+3}}{2} = 1$ et $\left.\begin{array}{l} \cos\theta = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. On a : $z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

On en déduit alors : $z^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et $\dfrac{1}{z} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ on remarque que $z^2 = \dfrac{1}{z}$

b) Les points A, $N_2 = P_2$ sont alignés.

Partie B : cas général

1) $\left(z^2+z+1\right)\left(1-\dfrac{1}{z}\right) = z^2 - z + z - 1 + 1 - \dfrac{1}{z} = z^2 - \dfrac{1}{z}$.

2) A, N et P alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{PN}$ et $\overrightarrow{PA}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ $\exists k \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{PN} = k\overrightarrow{PA}$ $\Leftrightarrow$

$z^2 - \dfrac{1}{z} = k\left(1-\dfrac{1}{z}\right) \overset{1)}{\Leftrightarrow} \left(z^2+z+1\right)\left(1-\dfrac{1}{z}\right) = k\left(1-\dfrac{1}{z}\right) \Leftrightarrow z^2+z+1 = k \in \mathbb{R}$.

3) $z^2+z+1 = (x+iy)^2 + x + iy + 1 = x^2 - y^2 + 2ixy + x + iy + 1 = (x^2-y^2+1) + i(2xy+y)$.

4) a) A, N et P alignés $\Leftrightarrow$ $z^2+z+1 \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $2xy + y = 0$ $\Leftrightarrow$ $y(2x+1) = 0$.

L'ensemble (E) est l'union des droites d'équations $y = 0$ et $x = -\dfrac{1}{2}$ privé du point O.

b) On obtient le graphique suivant :