Contrôle de mathématiques

Lundi 30 septembre 2019

EXERCICE 1

Monotonie **(2 points)**

Soit la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par : $u_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$

1) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$

2) En déduire la monotonie de la suite (u_n)

EXERCICE 2

Programmation d'une suite **(4 points)**

On donne l'image de l'écran d'une calculatrice :

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
ÉDIT MENU: [alpha] [f5]
PROGRAM:A
:Prompt N
:1→U
:For(I,2,N)
:U+I^3→U
:End
:Disp U
```

1) Qu'affiche cet algorithme pour $N = 1$, $N = 2$, $N = 5$ et $N = 10$.

2) Cet algorithme calcule le terme général u_n d'une suite (u_n) en fonction de n.
Donner l'expression de u_n en fonction de n.

3) Soit $f(n) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$. Calculer en détaillant les calculs : $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$ et $f(10)$.

4) Quelle conjecture sur la forme explicite du terme u_n peut-on faire ?

EXERCICE 3

Somme de terme **(4 points)**

1) Soit la somme $S = 38 + 45 + 52 + 59 + \cdots + 1676$

   a) Déterminer le nombre de termes de la somme S.

   b) Calculer la valeur de la somme S en rappelant la formule utilisée.

2) Soit une suite géométrique (u_n) telle que : $u_2 = -20$ et $u_5 = 160$.

   a) Déterminer la raison de la suite (u_n) puis le terme u_{13}.

   b) Calculer la somme : $T = u_2 + u_3 + \cdots + u_{13}$
   On rappellera la formule utilisée.

EXERCICE 4

Loi de refroidissement de Newton **(5 points)**

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80 °C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée M.

Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café à l'aide de la loi de Newton.

Pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 80$.
On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité : $T_{n+1} - T_n = k(T_n - M)$ où k est une constante réelle.
On choisit $M = 10$ et $k = -0,2$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10)$.

1) D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite (T_n) ?
2) Montrer que pour tout entier naturel n : $T_{n+1} = 0,8T_n + 2$.
3) On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = T_n - 10$.
   a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.
   b) Exprimer u_n puis T_n en fonction de n.
   c) Déterminer la limite de la suite (T_n).
4) On considère l'algorithme suivant :

tant que $T \geqslant 40$ **faire**
  $T \leftarrow 0,8T + 2$
  $n + 1 \leftarrow n$
fin

   a) Au début, on affecte la valeur 80 à la variable T et la valeur 0 à la variable n. Recopier, compléter cet algorithme pour qu'il donne la valeur numérique de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme.
   b) Interpréter la valeur trouvée dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 5

Convergence d'une suite **(5 points)**

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par son premier terme u_1 et, par la relation pour $n \geqslant 1$: $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$.

1) Vérifier, en détaillant le calcul, que si $u_1 = 0$ alors $u_4 = -17$.
2) Écrire un algorithme qui donne les termes de u_2 à u_{13} le terme u_1 étant donné.
3) Exécuter cet algorithme pour $u_1 = 0,7$ puis pour $u_1 = 0,8$.
   Donner les valeurs de u_{13} pour $u_1 = 0,7$ et pour $u_1 = 0,8$:

   Quelle semble être la limite de cette suite si $u_1 = 0,7$? Et si $u_1 = 0,8$?