Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 30 septembre 2019

EXERCICE 1

Monotonie **(2 points)**

1) $$u_{n+1} - u_n = \frac{3(n+1)+1}{(n+1)+1} - \frac{3n+1}{n+1} = \frac{3n+4}{n+2} - \frac{3n+1}{n+1}$$
$$= \frac{(3n+4)(n+1) - (3n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{3n^2+3n+4n+4-3n^2-6n-n-2}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n+1)(n+2) > 0 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} - u_n > 0$. La suite (u_n) est croissante.

EXERCICE 2

Programmation d'une suite **(5 points)**

1) Si on rentre cet algorithme sur la calculatrice, on trouve :

N	1	2	5	10
U	1	9	225	3 025

2) Cet algorithme calcule $u_n = 1^3 + 2^3 + \dots n^3$ soit la somme des cubes jusqu'à n.

3) On obtient le tableau suivant :

n	1	2	5	10
$f(n)$	$\frac{1^2 \times 2^2}{4} = 1$	$\frac{2^2 \times 3^2}{4} = 9$	$\frac{5^2 \times 6^2}{4} = 225$	$\frac{10^2 \times 11^2}{4} = 3\,025$

4) D'après les deux tableaux, on peut conjecturer que :
$$u_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Remarque : On obtient le résultat $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

EXERCICE 3

Somme de terme **(4 points)**

1) Soit la somme $S = 38 + 45 + 52 + 59 + \cdots + 1676$

a) Somme des termes d'une suite arithmétique de raison 7.
Comme les termes sont espacés de 7 unités, le nombre de termes est : (règle des piquets et intervalles)
$$\frac{1676 - 38}{7} + 1 = 235$$

b) $S = \text{Nbre de termes} \times \dfrac{\sum \text{termes extrêmes}}{2} = 235 \times \dfrac{38 + 1676}{2} = 201\,395.$

2) a) $u_5 = u_2\, q^{5-3} \quad \Leftrightarrow \quad q^3 = \dfrac{160}{-20} = -8 = (-2)^3 \quad \Leftrightarrow \quad q = -2.$

La raison de la suite (u_n) est $q = -2$. (la fonction cube est monotone)

On obtient alors $u_{13} = u_2\, q^{11} = (-20)(-2)^{11} = 40\,960.$

b) $T = 1^{\text{er}}\text{ terme} \times \dfrac{1-q^{\text{Nbre termes}}}{1-q} = u_2 \times \dfrac{1-q^{12}}{1-q} = (-20) \times \dfrac{1-(-2)^{12}}{1-(-2)} = \dfrac{-20(1-2^{12})}{3}$
$= 27\,300$

Exercice 4

Loi de refroidissement de Newton **(5 points)**

1) Comme il s'agit du refroidissement d'une tasse de café, la suite (T_n) est par ce contexte décroissante.

2) D'après la loi de Newton, en remplaçant $K = -0,2$ et $M = 10$, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$,
$T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10) \Leftrightarrow T_{n+1} = T_n - 0,2T_n + 2 \Leftrightarrow T_{n+1} = 0,8T_n + 2$.

3) a) $u_{n+1} = T_{n+1} - 10 = 0,8\,T_n + 2 - 10 = 0,8\,T_n - 8 = 0,8(T_n - 10) = 0,8\,u_n$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0,8$, la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0,8$ et de 1^{er} terme $u_0 = T_0 - 10 = 70$.

b) On a alors $u_n = u_0\,q^n = 70 \times 0,8^n$ donc $T_n = u_n + 10 = 70 \times 0,8^n + 10$.

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$ car $-1 < 0,8 < 1$. Par produit et somme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n = 10$.

4) a) On obtient l'algorithme suivant :

```
T ← 80
N ← 0
tant que T ⩾ 40 faire
  | T ← 0,8T + 2
  | n + 1 ← n
fin
Afficher N
```

On obtient alors la valeur : $N = 4$

b) Au bout de 4 minutes la température de la tasse est inférieure à 40 °C

Exercice 5

Convergence d'une suite **(4 points)**

1) $u_2 = 2u_1 - 1 = 2 \times 0 - 1 = -1$, $u_3 = 3u_2 - 1 = 3 \times (-1) - 1 = -4$,
$u_4 = 4u_3 - 1 = 4 \times (-4) - 1 = -17$.

2) On peut écrire l'algorithme suivant :

```
Entrées et initialisation
  | Lire U
Traitement et sorties
  | pour K de 2 à 13 faire
  |   | K U − 1 → U
  |   | Afficher U
  | fin
```

3) On a exécuté cet algorithme pour $u_1 = 0,7$ puis pour $u_1 = 0,8$.
On obtient les valeurs de u_{13} suivantes :

$u_1 = 0,7$	$u_{13} = -113\,841\,326$
$u_1 = 0,8$	$u_{13} = 508\,860\,754$

La limite de cette suite semble être $-\infty$ si $u_1 = 0,7$ et $+\infty$ si $u_1 = 0,8$.