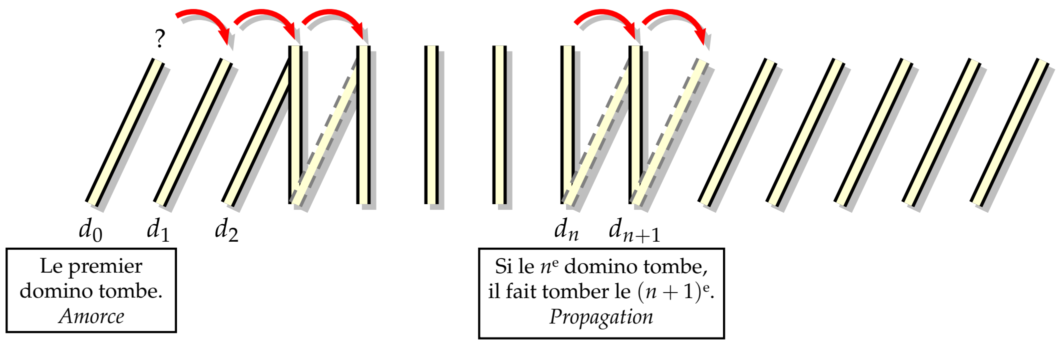
Raisonnement par récurrence. Limite d'une suite

Table des matières

1 Raisonnement par récurrence

1.1 Effet domino

Le raisonnement par récurrence s'apparente à l'effet domino. On considère une file de dominos espacés régulièrement.



- Le premier domino d_0 tombe. C'est l'amorce.
- Les dominos sont suffisamment proches pour que si l'un des dominos d_n tombe le suivant d_{n+1} tombe également. C'est la propagation.

On peut conclure que tous les dominos de la file tombent les uns après les autres.

Transposons cet effet domino à une propriété mathématique.

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0,3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{2}$

Soit la propriété (P) : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$

- Le premier domino tombe :
  $u_0 = 0,3$ donc $0 < u_0 < 1$. La propriété est amorcée.
- Si l'un des dominos tombe le suivant tombe également :
  si $0 < u_n < 1 \overset{\times\frac{1}{2}}{\Rightarrow} 0 < \dfrac{1}{2}u_n < \dfrac{1}{2} \overset{+\frac{1}{2}}{\Rightarrow} \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{2} < 1.$
  On a ainsi $0 < \dfrac{1}{2} < u_{n+1} < 1$. La propriété se propage.

Comme le premier domino est tombé et que les autres tombent par propagation, tous les dominos tombent et donc la propriété est bien vérifiée pour tout entier naturel.

1.2 Conjecture et raisonnement par récurrence

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$

On souhaiterait obtenir une formule permettant de calculer explicitement u_n en fonction de n. À première vue, cette formule ne saute pas aux yeux.
Dans une telle situation, le calcul des premiers termes est souvent intéressant pour dégager une conjecture.

Calculons les cinq premiers termes et essayons de dégager une relation :

$$\left.\begin{array}{lll} u_1 = 2u_0 + 1 = 1 & \Rightarrow & u_1 + 1 = 2 \\ u_2 = 2u_1 + 1 = 3 & \Rightarrow & u_2 + 1 = 4 = 2^2 \\ u_3 = 2u_2 + 1 = 7 & \Rightarrow & u_3 + 1 = 8 = 2^3 \\ u_4 = 2u_3 + 1 = 15 & \Rightarrow & u_4 + 1 = 16 = 2^4 \\ u_5 = 2u_4 + 1 = 31 & \Rightarrow & u_5 + 1 = 32 = 2^5 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Les premiers termes semblent} \\ \text{obéir à la formule } 2^n - 1\end{array}$$

La suite (u_n) semble obéir à une loi toute simple : en ajoutant 1 à chaque terme, on obtient les puissances successives de 2.

Nous pouvons donc émettre la conjecture suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = 2^n - 1$

⚠ Une conjecture n'est pas une preuve (ni une affirmation nécessairement vraie, certaines conjectures se révèlent parfois fausses...). Ce n'est que l'énoncé d'une propriété résultant d'un certain nombre d'observations.

Comment confirmer, par une démonstration, la propriété conjecturée ci-dessus ?

Notons (P_n) la propriété, définie par : $u_n = 2^n - 1$.

Supposons (P_n) vraie donc : $u_n = 2^n - 1$

On a alors : $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$ donc (P_{n+1}) vraie.

Autrement dit, si la propriété est vraie à un certain rang n alors elle l'est également au rang suivant $(n+1)$. On dit que la propriété (P_n) est **héréditaire**.

(P_0), (P_1), (P_2), (P_3), (P_4), (P_5) sont vraies. On dit que la propriété (P_n) est **initialisée**.
Comme (P_n) est héréditaire, elle sera vraie encore au rang $n = 6$, puis au rang $n = 7$ etc. Si bien que notre propriété est finalement vraie à **tout rang** n.

1.3 Axiome de récurrence

Définition 1 : Soit une propriété (P_n) définie sur $\mathbb{N}$.

- Si la propriété est **initialisée** à partir du rang 0 ou n_0
- et si la propriété est **héréditaire** à partir du rang 0 ou n_0 (c'est à dire que pour tout $n \geqslant 0$ ou $n \geqslant n_0$ alors $\mathrm{P}_n \Rightarrow \mathrm{P}_{n+1}$)

Alors : la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ à partir du rang 0 ou n_0

Remarque : Ce raisonnement s'apparente à l'effet domino : « Si un domino tombe alors le suivant tombera. »
Si le premier tombe alors le second tombera, puis le troisième, puis le quatrième...
Conclusion : si le premier domino tombe alors tous tomberont.

Le raisonnement par récurrence comporte deux phases :

- Prouver que la propriété est initialisée
- Prouver que la propriété est héréditaire

Si on montre ces deux phases, la propriété est démontrée pour tout entier naturel.

⚠ Il faut veiller à ce que les deux conditions « initialisation » et « hérédité » soient vérifiées. En effet si l'une des deux conditions n'est pas respectée, on arrive à une conclusion erronée comme le prouvent les deux exemples du paragraphe 1.6

1.4 Inégalité de Bernoulli

Théorème 1 : Soit un réel a strictement positif. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+a)^n \geqslant 1+na$$

Démontrons cette inégalité par récurrence.

- **Initialisation :** $n=0$, $(1+a)^0 = 1$ et $1+0a=1$, donc $(1+a)^0 \geqslant 1+0a$.
  La propriété est initialisée.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $(1+a)^n \geqslant 1+na$ montrons alors que $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$

  HR[1] : $(1+a)^n \geqslant 1+na \overset{\times(1+a)>0}{\Rightarrow} (1+a)(1+a)^n \geqslant (1+a)(1+na)$

  $\Rightarrow \quad (1+a)^{n+1} \geqslant 1+na+a+na^2 \quad \Rightarrow \quad (1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a+na^2$

  $\overset{na^2 \geqslant 0}{\Rightarrow} \quad (1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$

  La propriété est héréditaire
- Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+a)^n \geqslant 1+na$

Remarque : Pour l'hérédité, on utilise la propriété : $\left.\begin{array}{l} a \geqslant b+c \\ c \geqslant 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a \geqslant b$

1.5 Application aux suites

Soit la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad 0 < u_n < u_{n+1} < 2$

⇒ ⇒

Montrons l'encadrement par récurrence.

Initialisation : $n=0$, on a $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{3}$ donc $0 < u_0 < u_1 < 2$.
La propriété est initialisée.

Hérédité : : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 < u_n < u_{n+1} < 2$, montrons que $0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 2$.

HR : $0 < u_n < un+1 < 2 \overset{+2}{\Rightarrow} 2 < u_n+2 < u_{n+1}+2 < 4$

$\overset{\sqrt{\ }\nearrow}{\Rightarrow} \quad \sqrt{2} < \sqrt{u_n+2} < \sqrt{u_{n+1}+2} < 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} < u_{n+1} < u_{n+2} < 2$

$\overset{\sqrt{2}>0}{\Rightarrow} \quad 0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 2$

1. Hypothèse de Récurrence

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité, $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 0 < u_n < u_{n+1} < 2$.

Remarque : La suite (u_n) est croissante et bornée dans $[0\ ;\ 2]$.

1.6 Situations amenant à une conclusion erronée

- **Situation 1 :** Hérédité seulement vérifiée

  Soit la propriété suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 3$ divise 2^n
  Hérédité : on suppose que 3 divise 2^n, montrons que 3 divise 2^{n+1}.

  Si 3 divise 2^n, alors il existe un entier naturel k tel que : $2^n = 3k$
  En multipliant par 2 : $2^{n+1} = 2 \times 3k = 3(2k)$. 3 divise donc 2^{n+1}

  Conclusion : la proposition est héréditaire mais comme elle n'est pas initialisée, 3 ne divise pas $2^0 = 1$, la proposition est fausse.

- **Situation 2 :** Initialisation vérifiée jusqu'à un certain rang.

  Soit la propriété suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ n^2 - n + 41$ est un nombre premier

  L'initialisation est vérifiée car pour $n = 0$ on obtient 41 qui un nombre premier.

  Mais l'hérédité n'est pas assurée bien que La propriété soit vraie jusqu'à $n = 40$. On peut le vérifier avec une table de nombres premiers et la liste des premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - n + 41$.

n	u_n	n	u_n	n	u_n	n	u_n
0	41	11	151	22	503	33	1097
1	41	12	173	23	547	34	1163
2	43	13	197	24	593	35	1231
3	47	14	223	25	641	36	1301
4	53	15	251	26	691	37	1373
5	61	16	281	27	743	38	1447
6	71	17	313	28	797	39	1523
7	83	18	347	29	853	40	1601
8	97	19	383	30	911		
9	113	20	421	31	971		
10	131	21	461	32	1033		

  Pour $n = 41$, on a : $41^2 - 41 + 41 = 41^2$ qui n'est pas un nombre premier. La propriété est donc fausse.

  ⚠ La véracité d'une proposition pour les premières valeurs de n **ne prouve pas** une généralité $\forall n \in \mathbb{N}$!

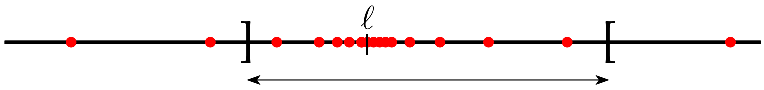
2 Limite d'une suite

2.1 Limite finie

Définition 2 : On dit que la suite (u_n) a pour limite ℓ si, et seulement si, tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et l'on dit que la suite (u_n) **converge** vers ℓ

Remarque : Cette définition traduit l'accumulation des termes u_n autour de ℓ et uniquement autour de ℓ. Lorsque ℓ existe, la limite est unique.



contient tous les termes u_n à partir du rang N

Suites de référence : Les suites définies pour tout entier naturel $n \neq 0$ par :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\ \left(\frac{1}{n}\right),\ \left(\frac{1}{n^2}\right),\ \dots,\ \left(\frac{1}{n^k}\right) \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*, \text{ ont pour limite } 0$$

Algorithme : : Déterminer à partir de quel entier n, le terme u_n est dans un intervalle centré en ℓ et de rayon 10^{-p}.

$$(u_n)\ :\ \begin{cases} u_0 = 0,1 \\ u_{n+1} = 2u_n(1-u_n) \end{cases}$$

On admet que cette suite est croissante et converge vers $0,5$. À partir de quel entier n le terme (u_n) est-il dans l'intervalle ouvert centré en 0,5 et de rayon 10^{-p}.

La fonction en Python $\lim(p)$ suivante permet de trouver n avec une boucle conditionnelle. On obtient alors pour $p = 3$: $n = 5$

```python
from math import*
def lim(p):
    u=0.1
    n=0
    while abs(u-0.5)>=10**(-p):
        u=2*u*(1-u)
        n+=1
    return n
```

2.2 Limite infinie

Définition 3 : On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, et seulement si, tout intervalle $]A\,;+\infty[$ (resp. $]-\infty;\ B[$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

On dit que la suite **diverge** vers $+\infty$ (resp. $-\infty$)

Remarque : Pour une limite $+\infty$, cette définition traduit l'idée que les termes de la suite arrivent à dépasser A, aussi grand soit-il.

Une suite peut n'avoir aucune limite : $u_n = (-2)^n$. La suite diverge sans limite.

Suites de référence : Les suites définies pour tout entier naturel par :

$$(\sqrt{n}),\ (n),\ (n^2),\ \dots,\ (n^k) \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*, \text{ ont pour limite } +\infty$$

Algorithme : Déterminer à partir de quel entier n, u_n est supérieur à 10^p.

$$(u_n)\ :\ \begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \dfrac{4}{3}u_n + 1 \end{cases}$$

On admet que (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$. À partir de quel entier n, le terme u_n est-il supérieur à 10^p

La fonction en Python $\lim(p)$ suivante permet de trouver n avec une boucle conditionnelle. On obtient alors pour $p = 3$: $n = 25$

```
def lim(p):
    u=-2
    n=0
    while u<=10**p:
        u=4/3*u+1
        n+=1
    return n
```

2.3 Limites par comparaison et par encadrement

Théorème 2 : Soit trois suites (u_n), (v_n), (w_n). Si à partir de $k \in \mathbb{N}$, on a :

Théorème d'encadrement ou « des gendarmes »

$$\left.\begin{array}{l} v_n \leqslant u_n \leqslant w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

Théorèmes de comparaison

$$\left.\begin{array}{l} u_n \geqslant v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \qquad \left.\begin{array}{l} u_n \leqslant w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Remarque : Le théorème des gendarmes s'utilise pour montrer une limite finie et les théorèmes de comparaison une limite infinie.

Démonstration : Théorème de comparaison en $+\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, donc pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\text{si} \quad n > N \quad \text{alors} \quad v_n \in]A; +\infty[$$

$\forall n \geqslant k,\ u_n > v_n$ donc $\forall n > \max(N, k)$ alors $u_n \in]A; +\infty[$

On a donc bien : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exemples :

- Démontrer que la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{\sin n}{n+1}$ est convergente.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{\sin n}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

$$\text{or} \quad \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

- Montrer que la suite (v_n) définie par : $v_n = n + \sin n$ diverge vers $+\infty$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n + \sin n \geqslant n - 1$$

$$\text{or} \quad \lim_{n\to+\infty} n - 1 = +\infty$$

Donc, d'après les théorèmes de comparaison, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

2.4 Opérations sur les limites

Les théorèmes suivants sont admis. Il est assez intuitif de penser que la limite de la somme, du produit ou du quotient est la somme, le produit ou le quotient des limites. Seuls 4 cas représentent des formes indéterminées et donc ne peuvent se résoudre par opération. Il faudra alors soit essayer de changer la forme de u_n, soit utiliser les théorèmes de comparaison ou des gendarmes, soit le théorème sur les suites monotones (voir plus loin) pour pouvoir conclure.

2.4.1 Limite d'une somme

Si (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

*F.I. = forme indéterminée

Exemples : Déterminer les limites des suites suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 3n + 1 + \dfrac{2}{n}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 3n+1 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0 \end{array}\right\} \text{Par somme } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 5 - \dfrac{1}{n}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 5 - \dfrac{1}{n} = 5 \end{array}\right\} \text{Par somme } \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 5$$

- $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = n^2 - n + 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -n+2 = -\infty \end{array}\right\} \text{F.I. Trouver une autre méthode}$$

2.4.2 Limite d'un produit

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	∞*	F.I.	∞*

*Appliquer la règle des signes

Exemples : Déterminer les limites des suites suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n^2 - n + 2$
$$= n^2\left(1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2} = 1 \end{array}\right\} \text{Par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

- $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (2-n) \times 3^n$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2 - n = -\infty \end{array}\right\} \text{Par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$$

- $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{1}{n+1} \times (n^2+3)$ $\qquad \left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2+3 = +\infty \end{array}\right\}$ F.I. Trouver une autre forme

2.4.3 Limite d'un quotient

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞	∞
Si (v_n) a pour limite	$\ell' \neq 0$	0 (1)	0	∞	ℓ'	∞
alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞*	F.I.	0	∞*	F.I.

*Appliquer la règle des signes

(1) 0 signe constant : on écrira 0^+ pour une nombre positif et 0^- pour un nombre négatif.

Exemples : Déterminer les limites des suites suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{5}{2n^2+1}$ $\qquad \left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 5 = 5 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2n^2+1 = +\infty \end{array}\right\}$ Par quotient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

- $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1-n}{0,5^n}$ $\qquad \left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1-n = -\infty \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,5^n = 0^+ \end{array}\right\}$ Par quotient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \dfrac{n^2+3}{n+1} \overset{\div n}{=} \dfrac{n+\dfrac{3}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}$ $\qquad \left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} n+\frac{3}{n} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n} = 1 \end{array}\right\}$ Par quotient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = +\infty$

2.5 Limite d'une suite géométrique

Théorème 3 : Soit q un réel. On a les limites suivantes :

- Si $q > 1$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$
- Si $-1 < q < 1$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q \leqslant -1$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas

Démonstration : Pour $q > 1$

D'après l'inégalité de Bernoulli, on a, pour $a > 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+a)^n \geqslant 1+na$$

$q > 1$ donc il existe $a > 0$ tel que $q = 1+a$. L'inégalité devient : $q^n \geqslant 1+na$.

Comme $a > 0$ on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1+na = +\infty$

D'après le théorèmes de comparaison on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

Remarque : Pour $-1 < q < 1$ et $q \neq 0$, on peut poser $Q = \dfrac{1}{|q|}$, donc $Q > 1$.
On revient alors à la première limite et l'on conclut avec le quotient sur les limites.

Exemple : Soit une suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 5 \end{cases}$

On pose la suite (v_n) telle que $v_n = u_n + 5$

1) Montrer que la suite (v_n) est géométrique
2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n
3) En déduire la limite de (u_n)

1) $v_{n+1} = u_{n+1} + 5 = (2u_n + 5) + 5 = 2(u_n + 5) = 2v_n$

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 2$, donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 5 = 7$
2) On en déduit alors : $v_n = v_0 q^n = 7 \times 2^n$ donc $u_n = v_n - 5 = 7 \times 2^n - 5$
3) $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ car $2 > 1$

   Par somme et produit, on a donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

2.6 Convergence d'une suite monotone

2.6.1 Suites majorées, minorées et bornées

Définition 4 : Soit une suite (u_n)

- (u_n) est majorée si, et seulement si, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$.
- (u_n) est minorée si, et seulement si, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$.
- (u_n) est bornée si et seulement si (u_n) est majorée et minorée.

Remarque : Le majorant ou le minorant n'est pas unique. En effet si 2 majore la suite (u_n) alors tout réel supérieur à 2 majore aussi (u_n).

Exemple : Montrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \quad \text{est bornée par l'intervalle } \left[\frac{1}{2};1\right]$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \leqslant \overbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}^{n \text{ termes}} = n \times \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad u_n \leqslant 1$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \overbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}^{n \text{ termes}} = n \times \frac{1}{2n} \quad \Rightarrow \quad u_n \geqslant \frac{1}{2}$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$. La suite (u_n) est bornée dans $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$.

2.6.2 Théorèmes de divergence et de convergence

Théorème 4 : Divergence Soit (u_n) une suite.

- Si (u_n) est **croissante et non majorée** alors (u_n) diverge vers $+\infty$.
- Si (u_n) est **décroissante et non minorée** alors (u_n) diverge vers $-\infty$.

Démonstration : Soit une suite (u_n) croissante et non majorée.
(u_n) n'est pas majorée, donc pour tout intervalle $]A;+\infty[$,

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que :} \quad u_N \in]A;+\infty[$$

Comme (u_n) est croissante, on a : $\forall n > N \quad \text{alors} \quad u_n > u_N$

Donc : $\forall n > N \quad \text{alors} \quad u_n \in]A;+\infty[$

donc à partir d'un certain rang tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]A;+\infty[$. La suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exemple : : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = 2n + 3 > 0$. La suite (u_n) est croissante.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant n^2$.

Initialisation : $n = 0$, on a $u_0 = 1 \geqslant 0^2$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \geqslant n^2$, montrons que $u_{n+1} \geqslant (n+1)^2$.

HR : $u_n \geqslant n^2 \overset{+(2n+3)}{\Rightarrow} u_n + 2n + 3 \geqslant n^2 + 2n + 3 \Rightarrow u_{n+1} \geqslant (n^2+2n+1) + 2 \Rightarrow$
$u_{n+1} \geqslant (n+1)^2 + 2 \geqslant (n+1)^2$. La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant n^2$.
La suite (u_n) n'est alors pas majorée.

La suite (u_n) est croissante et non majorée, d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$.

⚠ La réciproque de ce théorème est fausse, si une suite diverge vers $+\infty$, elle n'est pas nécessairement croissante. Pour s'en convaincre, voici deux suites qui divergent vers $+\infty$ et qui ne sont pas monotones :

$$u_n = n + (-1)^n \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} v_n = n & \text{si } n \text{ est pair} \\ v_n = 2n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Théorème 5 : Convergence

- Si une suite (u_n) est **croissante et majorée** alors la suite (u_n) converge.
- Si une suite (u_n) est **décroissante et minorée** alors la suite (u_n) converge.

Remarque : Ce théorème est admis.

⚠ Ce théorème permet de montrer qu'une suite converge vers une limite ℓ mais ne donne pas la valeur de cette limite. Un autre théorème, le théorème du point fixe permettra de déterminer ℓ.

On peut seulement dire que, si (u_n) est croissante et majorée par M alors $\ell \leqslant M$ et si (u_n) est décroissante et minorée par m alors $\ell \geqslant m$

Exemple : Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$

On a montré par récurrence au paragraphe 1.5 que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 0 < u_n < u_{n+1} < 2$.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 2, donc d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) est convergente vers $0 < \ell \leqslant 2$.

⚠ Lorsqu'on passe à la limite, l'inégalité stricte $u_n < 2$ devient large $\ell \leqslant 2$.

Algorithme : On admet que la suite u_n converge vers 2, déterminer à l'aide d'un algorithme, l'entier N à partir duquel $u_n > 1{,}999$.

On reprend la fonction $\lim(p)$ en Python du paragraphe 2.1 en l'adaptant à l'exercice.

$u_n > 1{,}999 \quad \Rightarrow \quad |u_n - 2| < 10^{-3}$

On trouve alors : lim(3) $\to$ 6.
À partir de $n \geqslant 6,\ \ u_n > 1{,}999$

```
from math import*
def lim(p):
    u=1
    n=0
    while abs(u-2)>=10**(-p):
        u=sqrt(u+2)
        n+=1
    return n
```

2.7 Utilisation de la limite d'une suite

La méthode de Héron d'Alexandrie (Ier siècle) permet de calculer l'approximation d'une racine carrée d'un nombre strictement positif, à l'aide d'une suite convergeant vers cette valeur.

On commence par donner une valeur initiale strictement positive a, de préférence voisine de $\sqrt{A}$ et l'on cherche à encadrer la valeur $\sqrt{A}$ à l'aide de a et A.

$$\text{Si } a < \sqrt{A} \overset{\uparrow(-1)}{\Rightarrow} \frac{1}{a} > \frac{1}{\sqrt{A}} \overset{\times A > 0}{\Rightarrow} \frac{A}{a} > \frac{A}{\sqrt{A}} \overset{\frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}}{\Rightarrow} \frac{A}{a} > \sqrt{A} \text{ d'où } a < \sqrt{A} < \frac{A}{a}$$

$$\text{Si } a > \sqrt{A} \overset{\uparrow(-1)}{\Rightarrow} \frac{1}{a} < \frac{1}{\sqrt{A}} \overset{\times A > 0}{\Rightarrow} \frac{A}{a} < \frac{A}{\sqrt{A}} \overset{\frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}}{\Rightarrow} \frac{A}{a} < \sqrt{A} \text{ d'où } \frac{A}{a} < \sqrt{A} < a$$

On en conclut que $\sqrt{A}$ est toujours compris entre a et $\dfrac{A}{a}$.

On réduit alors cet intervalle en prenant la moyenne arithmétique m des deux valeurs a et $\dfrac{A}{a}$. On a alors : $m = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{A}{a}\right)$

On remplace alors la valeur de a par la valeur de m et on réitère le processus.

On construit une suite (u_n), suite des valeurs de a, définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{A}{u_n}\right) \end{cases}$$

- A et a étant strictement positif, il est immédiat que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n > 0$.

- Montrons ensuite que $u_n > \sqrt{A}$ pour $n \geqslant 1$:

$$u_{n+1}^2 - A = \left(\frac{u_n^2 + A}{2u_n}\right)^2 - A = \frac{u_n^4 + 2Au_n^2 + A^2 - 4Au_n^2}{4u_n^2} = \frac{u_n^4 - 2Au_n^2 + A^2}{4u_n^2}$$
$$= \left(\frac{u_n^2 - A}{2u_n}\right)^2 > 0 \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}^2 > A \overset{\sqrt{\ }\nearrow}{\Longrightarrow} u_{n+1} > \sqrt{A}$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > \sqrt{A}$

- Montrons que (u_n) est décroissante à partir de $n = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{A}{u_n}\right) - u_n = \frac{u_n^2 + A - 2u_n^2}{2u_n} = \frac{A - u_n^2}{2u_n} < 0 \text{ car } u_n^2 > A$$

- La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 à partir de $n = 1$, d'après le théorème des suites monotones, la suite u_n converge.

La convergence est très rapide : à chaque itération, le nombre de décimales exactes est multiplié par deux !

Python On peut écrire le programme suivant :

On détermine le premier terme en cherchant le carré le plus proche A avec une boucle conditionnelle et on affecte cette valeur à u, puis on fait n itérations pour trouver u_n.

Si on cherche la valeur approchée de $\sqrt{431}$:
racine(431,2) $\approx 20,760\,539\,536$

La précision est de : $|u - \sqrt{431}| \approx 4,4\,10^{-8}$

```
from math import*
def racine(A,n):
    i=0
    while A>i**2
        i+=1
    u=i
    for i in range(1,n+1):
        u=1/2*(u+A/u)
    return u
```