Algorithme Néper-Briggs

L'historique

Au XVII[e] siècle lorsque Néper et de Briggs inventent les logarithmes, on ne disposait comme méthodes de calcul que les quatre opérations et l'extraction d'une racine carrée. Henry Briggs publie en 1624 une table partielle de logarithmes avec une précision de 14 décimales, véritable exploit pour l'époque !
Pour établir une table, ces deux mathématiciens ont utilisé, entre autre, la méthode suivante.

La théorie

1) a) Montrer pour tout $x > 0$: $\dfrac{x-1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1$.
   b) Que peut-on dire de cet encadrement si x est proche de 1.

2) Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.
   On suppose que $u_0 \geqslant 1$.
   a) Montrer par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geqslant 1$.
   b) Étudier la monotonie de la suite (u_n)
   c) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.
   d) Montrer alors que $\ell = 1$.
   On montre que pour $0 < u_0 < 1$, la suite (u_n) est croissante et converge vers 1.

L'algorithme

3) Soit la fonction $\ln(x,p)$ en Python :

```
def ln(x,p):
    n=0
    while abs(x-1)>10**-p:
        n+=1
        x=sqrt(x)
    y=x-1
    z=y/x
    for i in range(n):
        y=2y
        z=2z
    return z,y
```

   a) Cet algorithme utilise la racine carrée d'un réel.
   Quel algorithme permet de calculer la racine carrée d'un nombre ?
   Cet algorithme était-il connu de Néper et Briggs ?
   b) Pourquoi la boucle conditionnelle (tant que) finie-t-elle par s'arrêter ?
   c) Pourquoi dans la boucle d'itérations (pour) on multiplie y et z par 2 ?
   d) Dans $\ln(2,6)$ que représentent les valeurs retournée par cette fonction ?
   Quelle est la précision obtenue ?
   e) Déterminer p dans $\ln(2,p)$ pour avoir 14 décimales exacte de $\ln 2$.