Rappels sur la fonction exponentielle
Fonction logarithme népérien

Table des matières

-

1 Rappels sur la fonction exponentielle

1.1 Définition et propriétés

Définition 1 : La fonction exponentielle, notée exp, est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée et vérifiant : $\exp(0) = 1$.

Remarque : En admettant l'existence d'une telle fonction, on montre l'unicité en montrant que la fonction exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. (cf cours première spé)

Théorème 1 : Propriétés

- Relation fonctionnelle : $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.
- Positivité : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0$
- Monotonie : La fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$
- Notation d'Euler : On pose $\exp(x) = e^x$ avec $e = \exp(1) \approx 2,718$

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \ :\ e^{a+b} = e^a\, e^b \ ;\ e^{-a} = \frac{1}{e^a} \ ;\ e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \ ;\ e^{na} = (e^a)^n \ ,\ n \in \mathbb{N}$$

Remarque : La relation fonctionnelle pourrait servir de définition à la fonction exponentielle : « unique fonction qui prend la valeur 1 en 0 et qui transforme une somme en produit ».

Algorithme : On obtient une approximation de e par l'approximation affine de l'exponentielle en a : $e^{a+p} \approx e^a(1+p)$ où p est le pas.

e(0.000 1) renvoie 2,718

```python
def e(p):
    e=1
    for i in range(int(1/p)):
        e=e*(1+p)
    return e
```

Théorème 2 : Équation et inéquation

- De la monotonie de la fonction exp, on a : $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- De la croissance de la fonction exp, on a : $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{2x^2+3} = e^{7x}$

$$e^{2x^2+3} = e^{7x} \overset{\text{monotonie}}{\Leftrightarrow} 2x^2+3 = 7x \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$\Delta = 25 = 5^2,\ \text{d'où}\ x_1 = \frac{7+5}{4} = 3\ \text{ou}\ x_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{soit}\ S = \left\{\frac{1}{2}\ ;\ 3\right\}$$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{3x} \leqslant e^{x+6}$

$$e^{3x} \leqslant e^{x+6} \overset{\exp\nearrow}{\Leftrightarrow} 3x \leqslant x+6 \ \Leftrightarrow\ 2x \leqslant 6 \ \Leftrightarrow\ x \leqslant 3 \quad \text{soit} \quad S =]-\infty\ ;\ 3]$$

1.2 Limites

Théorème 3 : On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Démonstration : Soit la fonction f suivante : $f(x) = e^x - x$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^x - 1$, et de la croissance de la fonction exp

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0 \quad \text{et} \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

Du tableau de variation on en déduit que :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ donc $e^x > x$

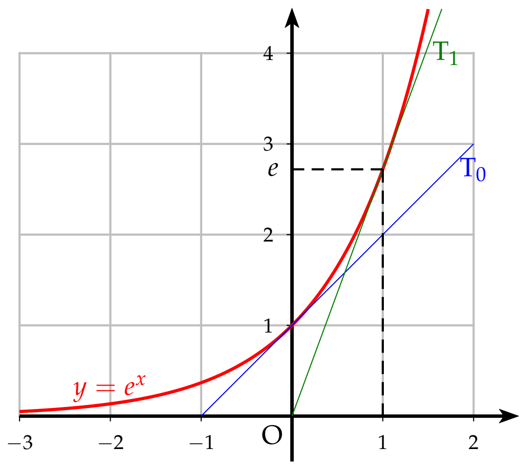
$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, par comparaison : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

En $-\infty$, on pose $X = -x$, d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{e^X} = 0$.

1.3 Courbe représentative

D'après les résultats obtenus, on a le tableau de variation et la courbe suivante :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
e^x	$+$			
e^x	$0 \nearrow$	$1 \nearrow$	$e \nearrow$	$+\infty$



T_0 : $y = x - 1$

T_1 : $\begin{cases} y = e\,x \\ \text{passe par l'origine} \end{cases}$

1.4 Des limites de référence

Théorème 4 : On a : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Démonstration : Découle de la définition de la dérivée en 0 de exp.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$$

Théorème 5 : **Croissance comparée**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

Démonstration : On a montré au paragraphe 1.2 que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ e^x > x$.

Pour $x > 0$, on pose $X = \dfrac{x}{n+1}$, la fonction puissance étant croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$e^X > X \ \Rightarrow\ e^{\frac{x}{n+1}} > \frac{x}{n+1} \ \overset{\uparrow n+1}{\Rightarrow}\ \left(e^{\frac{x}{n+1}}\right)^{n+1} > \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \ \Rightarrow\ e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$$

On divise par $x^n > 0$, $\dfrac{e^x}{x^n} > \dfrac{x}{(n+1)^{n+1}}$ or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{(n+1)^{n+1}} = +\infty$.

Par comparaison, on en déduit que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Pour la deuxième limite, on pose $X = -x$, d'où :

$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = \lim_{X \to +\infty} (-X)^n e^{-X} = \lim_{X \to +\infty} (-1)^n \times \frac{X^n}{e^X} = 0$$

Remarque : : On retiendra que : « en l'infini, e^x l'emporte sur x^n ».

2 Fonction logarithme népérien

Avant propos

La création de la fonction logarithme népérien est, à l'origine, antérieure à la fonction exponentielle bien que dans notre progression elle suive l'étude de la fonction exponentielle. La fonction logarithme a été créée par un drapier écossais du XVII[e] siècle. Ce drapier, Néper, cherche une fonction pour simplifier les longs calculs des astronomes, des navigateurs et des financiers. Il crée alors une fonction f qui transforme le produit en somme : $f(ab) = f(a) + f(b)$.

2.1 Définition

Définition 2 : On appelle fonction logarithme népérien notée ln, la fonction définie de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ telle que : $x = e^y \ \Leftrightarrow\ y = \ln x$

On dit que la fonction ln est la **fonction réciproque** de la fonction exponentielle.

On a alors : $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$ ainsi que

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \ \ln e^x = x$
- $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ \ e^{\ln x} = x$

Remarque : Cette fonction existe car la fonction exponentielle est une fonction continue, strictement croissante à valeur dans $]0\,;+\infty[$, donc d'après le TVI l'équation $x = e^y$, d'inconnue y avec $x \in]0\,;+\infty[$, admet une unique solution $\ln x$.

⚠ Faire attention à l'ensemble de définition de ln : $]0\,;+\infty[$.

Démonstration : $1 = e^0$ donc $\ln 1 = 0$ et $e = e^1$ donc $\ln e = 1$

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \ x = e^y \ \overset{\ln}{\Rightarrow}\ \ln x = \ln e^y \ \overset{y=\ln x}{\Rightarrow}\ y = \ln e^y$$

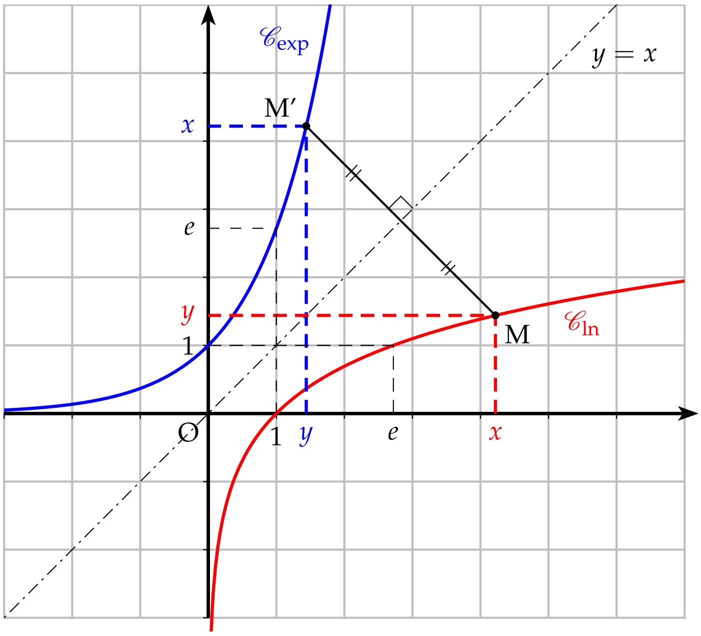
$$\forall x \in]0\,;+\infty[,\ \ y = \ln x \ \overset{\exp}{\Rightarrow}\ e^y = e^{\ln x} \ \overset{x=e^y}{\Rightarrow}\ x = e^{\ln x}$$

Exemple : $\ln e^{-2} = -2$ et $e^{\ln 5} = 5$

2.2 Représentation

Théorème 6 : Les représentations de la fonction logarithme népérien et de la fonction exponentielle sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Démonstration : Soit $\mathscr{C}_{\ln}$ et $\mathscr{C}_{\exp}$ les courbes respectives des fonctions ln et exp.
Soit $x \in]0;+\infty[$ et $y \in \mathbb{R}$
$M(x\,;\,y) \in \mathscr{C}_{\ln}$, donc $y = \ln x$ soit $x = e^y$, d'où $M'(y\,;\,x) \in \mathscr{C}_{\exp}$.
$\mathscr{C}_{\ln}$ et $\mathscr{C}_{\exp}$ sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



2.3 Variation de la fonction logarithme

Théorème 7 : La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$

Démonstration : Soit $a, b \in]0\,;+\infty[$ et $a < b$ alors on peut écrire :

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad e^{\ln a} < e^{\ln b}$$

comme la fonction exponentielle est strictement croissante, on a : $\ln a < \ln b$
La fonction logarithme est donc strictement croissante.

Propriété 1 : Soit a et b deux réels strictement positifs

- De la monotonie de la fonction ln, on a : $\ln a = \ln b \quad \Leftrightarrow \quad a = b$
- De la croissance de la fonction ln, on a : $\ln a > \ln b \quad \Leftrightarrow \quad a > b$

Remarque : Ces propriétés permettent de résoudre équations et inéquations. On veillera à déterminer les conditions de validité de l'équation ou de l'inéquation.

Exemples :

- Résoudre $\quad \ln(2-2x) = 1$.

  Validité : $2-2x>0 \;\Leftrightarrow\; x<1$ donc $D_f =]-\infty\,;1[$

  $x \in D_f,\; \ln(2-2x)=1 \;\Leftrightarrow\; \ln(2-2x)=\ln e \;\Leftrightarrow\; 2-2x=e \;\Leftrightarrow\; x=\dfrac{2-e}{2}$

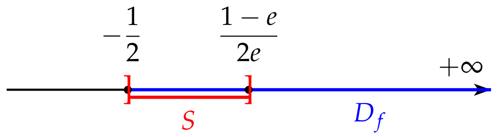
  $\dfrac{2-e}{2} < 0 \in D_f$ donc $S=\left\{\dfrac{2-e}{2}\right\}$

- Résoudre $\quad \ln(2x+1) \leqslant -1$

  Validité : $2x+1>0 \;\Leftrightarrow\; x>-\dfrac{1}{2}$ donc $D_f=\left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$

  $x\in D_f,\; \ln(2x+1)<-1 \;\Leftrightarrow\; \ln(2x+1)\leqslant \ln e^{-1} \;\Leftrightarrow\; 2x+1\leqslant e^{-1} \;\Leftrightarrow$

  $$x\leqslant \frac{e^{-1}-1}{2} \overset{\times e}{\Leftrightarrow} x\leqslant \frac{1-e}{2e}\approx -0,32$$



  $S=\left]-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1-e}{2e}\right]$

3 Propriétés algébriques de la fonction ln

3.1 Relation fonctionnelle

Théorème 8 : Pour tous $a,b\in]0\,;+\infty[$: $\ln ab=\ln a+\ln b$

Démonstration : $e^{\ln a+\ln b}=e^{\ln a}\times e^{\ln b}=ab=e^{\ln ab}$ donc $e^{\ln ab}=e^{\ln a+\ln b}$.
De la monotonie de la fonction exp : $\ln ab=\ln a+\ln b$.

Remarque : Cette propriété est à l'origine de la fonction logarithme.

Exemple : $\ln 6=\ln(2\times 3)=\ln 2+\ln 3$

3.2 Quotient, inverse, racine carrée et puissance

Théorème 9 : Pour tous $a,b\in]0\,;+\infty[$, on a :

- $\ln\dfrac{a}{b}=\ln a-\ln b$
- $\ln\dfrac{1}{b}=-\ln b$
- $\ln\sqrt{a}=\dfrac{1}{2}\ln a$
- $\ln a^n=n\ln a$ avec $n\in\mathbb{N}$

Remarque : On peut considérer que $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$ car $\ln\sqrt{a}=\dfrac{1}{2}\ln a$

Démonstration : De la monotonie de l'exponentielle :

- $e^{\ln\frac{a}{b}}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{e^{\ln a}}{e^{\ln b}}=e^{\ln a-\ln b} \;\Rightarrow\; \ln\dfrac{a}{b}=\ln a-\ln b$

- Pour $a = 1$ on a alors $\ln \dfrac{1}{b} = \ln 1 - \ln b = -\ln b$
- De $a = \sqrt{a} \times \sqrt{a}$ donc d'après la relation fonctionnelle, on a :
  $\ln a = \ln \sqrt{a} + \ln \sqrt{a} = 2 \ln \sqrt{a}$ d'où $\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \ln a$
- Par récurrence à l'aide de la relation fonctionnelle : $\ln a^n = n \ln a$.

Exemples : Voici 3 exemples d'utilisation de ces propriétés.

- $\ln 50 = \ln(2 \times 5^2) = \ln 2 + \ln 5^2 = \ln 2 + 2 \ln 5$
- $\ln \sqrt{12} = \dfrac{1}{2} \ln 12 = \dfrac{1}{2} \ln(2^2 \times 3) = \dfrac{1}{2}(2 \ln 2 + \ln 3) = \ln 2 + \dfrac{1}{2} \ln 3$
- Déterminer l'entier n tel que $2^n > 10\,000$

  De la croissance de la fonction ln : $\ln 2^n > \ln 10^4 \Leftrightarrow n \ln 2 > 4 \ln 10$

  On obtient alors : $n > \dfrac{4 \ln 10}{\ln 2}$ or $\dfrac{4 \ln 10}{\ln 2} \simeq 13.29$ donc $n \geqslant 14$
- Résoudre l'équation : $\ln \sqrt{2x - 3} = \ln(6 - x) - \dfrac{1}{2} \ln x$

  Validité : $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 6 - x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{3}{2} \\ x < 6 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = \left]\dfrac{3}{2} \,;\, 6\right[$

  $x \in D_f$, $\ln \sqrt{2x - 3} = \ln(6 - x) - \dfrac{1}{2} \ln x \overset{\times 2}{\Leftrightarrow} \ln(2x - 3) = 2 \ln(6 - x) - \ln x \Leftrightarrow$
  $\ln x + \ln(2x - 3) = 2 \ln(6 - x) \Leftrightarrow \ln[x(2x - 3)] = \ln[(6 - x)^2] \Leftrightarrow$
  $x(2x - 3) = (6 - x)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x = x^2 - 12x + 36 \Leftrightarrow x^2 + 9x - 36 = 0$

  $\Delta = 225 = 15^2$ d'où $x_1 = \dfrac{-9+15}{2} = 3 \in D_f$ ou $x_2 = \dfrac{-9-15}{2} = -12 \notin D_f$

  on conclut par : $S = \{3\}$

4 Étude de la fonction ln

4.1 Dérivée

Théorème 10 : La fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et : $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

Démonstration : On admet que la fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$

Soit la fonction f définie sur $]0\,; +\infty[$ par : $f(x) = e^{\ln x}$ ou $f(x) = x$

f est dérivable comme composée de fonctions dérivables :

$f'(x) = \ln' x \times e^{\ln x} = x \ln' x$ ou $f'(x) = 1$

On a donc $x \ln' x = 1 \Leftrightarrow \ln' x = \dfrac{1}{x}$

4.2 Limite en 0 et en l'infini

Théorème 11 : On a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

Démonstration :

- Pour montrer la limite en $+\infty$, on revient à la définition :

  Soit $M > 0$: $\ln x > M \overset{\exp\nearrow}{\Leftrightarrow} x > e^M$. On a alors :

  Tout intervalle $]M\,;+\infty[$ contient toute les valeur de $\ln x$ si $x \in]e^M\,;+\infty[$.

  Conclusion : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

- En 0^+, on pose $X = \dfrac{1}{x}$, d'où si $x \to 0^+$ alors $X \to +\infty$. On obtient alors :

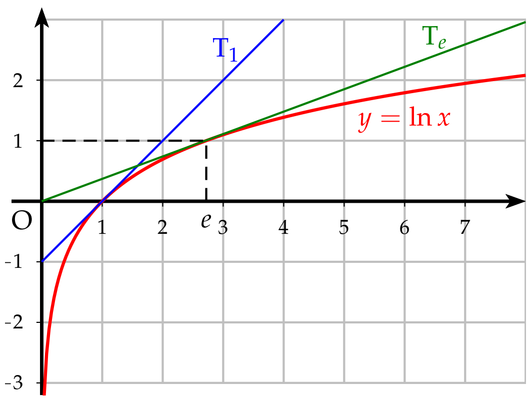
$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = \lim_{X\to+\infty} \ln\frac{1}{X} = \lim_{X\to+\infty} -\ln X = -\infty$$

4.3 Tableau de variation et courbe

D'après les résultats obtenus, on a le tableau de variation et la courbe suivante :

x	0	1	e	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	‖	$+$		
$\ln x$	‖ $-\infty$	0	1	$+\infty$

T_1 : $y = x - 1$ $\qquad$ T_e : $\begin{cases} y = \dfrac{1}{e}x \\ \text{passe par l'origine} \end{cases}$



4.4 Des limites de référence

Théorème 12 : On a : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Démonstration : Cela découle de la dérivée de ln en $x = 1$:

$$\left.\begin{aligned} (\ln)'(1) &= \frac{1}{1} = 1 \\ (\ln)'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} \end{aligned}\right\} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

Théorème 13 : Croissance comparée

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$$

Démonstration :

- On revient aux limites de croissance comparée de exp : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

  On pose : $X = \ln x^n \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^n = e^X \\ X = n \ln x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^n = e^X \\ \ln x = \dfrac{X}{n} \end{cases}$

  Si $x \to +\infty$ alors $x^n \to +\infty$ donc par composition $X = \ln x^n \to +\infty$

  D'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{n} \times \frac{X}{e^X} = 0$ car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

- En 0^+, on pose : $X = \dfrac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1}{X}$. Si $x \to 0^+$ alors $X \to +\infty$.

  D'où $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X^n} \ln \frac{1}{X} = \lim_{X\to+\infty} -\frac{\ln X}{X^n} = 0$

Remarque : On retiendra que : « en $+\infty$ et en 0, x^n l'emporte sur $\ln x$ ».

Exemple : Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x - \ln x)$

Limite indéterminée de la forme « $+\infty - \infty$ ». On factorise : $x - \ln x = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad (n=1) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Par somme et produit, on a :} \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x - \ln x) = +\infty \end{array}$$

4.5 Dérivée de la fonction ln u

Théorème 14 : Soit une fonction u dérivable et strictement positive sur D.

La fonction $\ln u$ est alors dérivable sur D et : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Démonstration : Dérivée de la composition de fonction u par ln.

Remarque : Les fonctions u et $\ln u$ ont le même sens de variation.
En effet comme $u > 0$, $(\ln u)'$ a le même signe que u'.

Exemple : Déterminer la dérivée de f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 > 0$ et $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

4.6 Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 4x - 4\ln x$

1) Étudier les limites de f en 0 et $+\infty$
2) Déterminer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f.
3) En déduire, en se justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
4) À l'aide d'une calculatrice donner un encadrement à 10^{-3} de ces solutions.

1) a) Limite en 0 : $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2 - 4x = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} -4\ln x = +\infty \end{array}\right\}$ Par somme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

b) Limite en $+\infty$: forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». On factorise par x :

$$f(x) = x^2\left(1 - \frac{4}{x} - 4 \times \frac{\ln x}{x^2}\right) \qquad \left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{4}{x} = 1 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par produit et somme} \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

2) f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables :

$$f'(x) = 2x - 4 - \frac{4}{x} = \frac{2x^2 - 4x - 4}{x} = \frac{2(x^2 - 2x - 2)}{x}$$

- $f'(x) = 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2 - 2x - 2 = 0$, on a $\Delta = 12 = (2\sqrt{3})^2$

  on obtient : $x_1 = \dfrac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$ ou $x_2 = 1 - \sqrt{3} < 0$ non retenu.
- signe de $f(x)$ = signe de $(x^2 - 2x - 2)$ avec $x > 0$

on obtient alors le tableau de variation suivant :

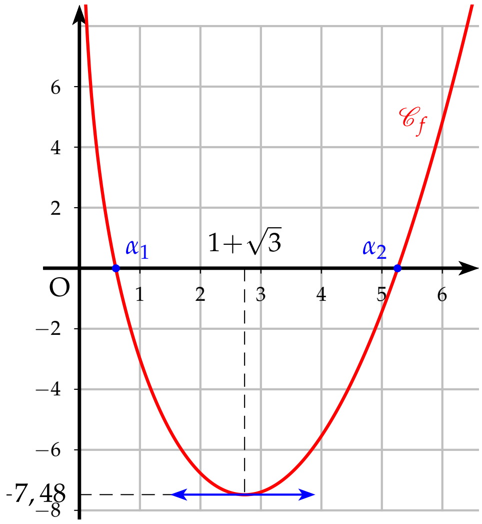
x	0		α_1		$1+\sqrt{3}$		α_2		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$		$-$		0		$+$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\approx -7,48$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) Sur les intervalles $\mathrm{I}_1 =]0\,;\,1+\sqrt{3}]$ et $\mathrm{I}_2 = [1+\sqrt{3}\,;+\infty[$ la fonction f est continue, strictement monotone et change de signe donc, d'après le TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α_1 et α_2 sur chacun de ces intervalles.

4) À l'aide de l'algorithme de dichotomie, on obtient les encadrements suivants :

$$0,600 < \alpha_1 < 0,601 \quad \text{et} \quad 5,261 < \alpha_2 < 5,262 \quad \text{à } 10^{-3} \text{ près}$$

À titre indicatif, voici la courbe de la fonction f.



5 Le logarithme décimal

Avant propos

Le logarithme décimal se prête beaucoup mieux aux calculs algébriques que le logarithme népérien. C'est Henry Briggs, contrairement à Néper, qui a choisi cette base pour établir une table de logarithmes qui jusqu'à l'apparition des calculatrices scientifiques au début des années 80 était la panoplie de l'étudiant scientifique. Ainsi sa table de logarithmes et sa règle à calcul (basée sur les logarithmes décimaux) en main, l'auteur de ses lignes a pu réussir son bac.

Pour l'étudiant actuel, le logarithme décimal se rencontre au physique dans des échelles de valeurs : décibel, pH d'une solution ou la magnitude d'un séisme. Bien que hors programme en math spé, il m'a semblé utile de rappeler quelques points qui serviront en physique-chimie spé ainsi que quelques exemples.

5.1 Définition

Définition 3 : On appelle logarithme décimal, la fonction, notée log, définie sur $]0;+\infty[$ par : $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

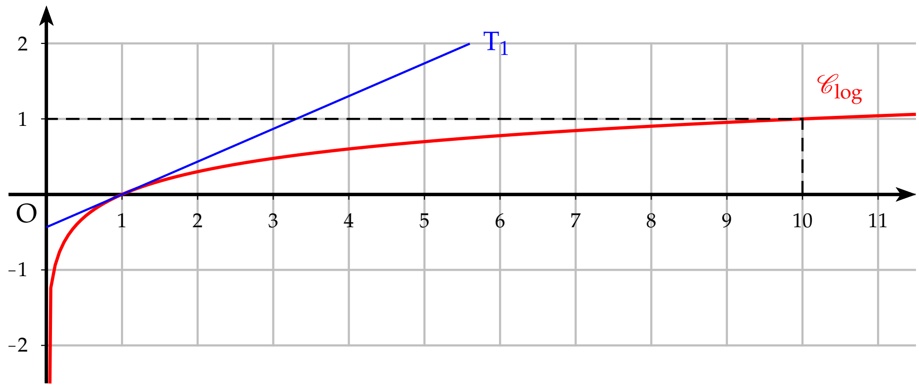
Sa fonction réciproque est $\exp_{10}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\exp_{10}(x) = 10^x$.

Remarque :

- $\dfrac{1}{\ln 10} > 0$, donc log a les mêmes variations et les mêmes limites que ln.
- On a : $\log 1 = 0$ et $\log 10 = 1$
- $y = \log x \Leftrightarrow x = 10^y$ ainsi : $\log 10^1 = 1, \log 10^2 = 2, \ldots, \log 10^n = n$
- La fonction log a les mêmes propriétés algébriques que la fonction ln.

$$\log(2.61 \times 10^5) = \log 2,61 + 5\log 10 = \underbrace{5}_{\text{partie entière}} + \underbrace{\log 2,61}_{\text{mantisse}}$$

- Représentation de log avec $\log' x = \dfrac{1}{x \ln 10}$ et $T_1 : y = \dfrac{1}{\ln 10}(x-1)$



5.2 Applications

5.2.1 Nombre de chiffres dans l'écriture décimale

Théorème 15 : Soit n un entier naturel non nul et E la fonction partie entière.
Le nombre de chiffres N de l'entier n vaut : $N = \mathrm{E}(\log n) + 1$

Démonstration : $n \geqslant 1$ est nécessairement compris entre deux puissances de 10.
Soit : $10^p \leqslant n < 10^{p+1}$ avec $p \in \mathbb{N}$. L'entier n possède alors $p+1$ chiffres.
De la croissance de la fonction log, on a :

$$\log 10^p \leqslant \log n < \log 10^{p+1} \quad \Leftrightarrow \quad p \leqslant \log n < p+1$$

On a donc : $p = \mathrm{E}(\log n)$, le nombre de chiffres N vaut donc : $N = \mathrm{E}(\log n) + 1$.

Exemple : Quel est le nombre de chiffres de 2020^{2021} ?

$$\log 2020^{2012} = 2021 \log 2020 \approx 6\,680{,}115$$

On en déduit alors que 2020^{2021} possède 6 681 chiffres !

5.2.2 En chimie

Définition 4 : L'acidité d'une solution est mesurée par : $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+]$

- Lorsque la concentration en $[\mathrm{H}^+]$ est multipliée par 10, le pH diminue de 1 :

$$-\log\left(10 \times [\mathrm{H}^+]\right) = -(\log 10 + \log[\mathrm{H}^+]) = -1 - \log[\mathrm{H}^+] = \mathrm{pH} - 1$$

- Une étiquette d'une eau minérale indique pH = 6,3. Calculer $[\mathrm{H}^+]$.

$$\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+] \quad \Leftrightarrow \quad [\mathrm{H}^+] = 10^{-\mathrm{pH}} \text{ donc } [\mathrm{H}^+] = 10^{-6,3} \approx 5 \times 10^{-7} \text{ mol/l}$$

5.2.3 En acoustique

Définition 5 : Le niveau sonore L (en décibels) d'un son d'intensité I vaut :

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad \text{avec} \quad I_0 = 10^{-12}\ \text{W.m}^{-2}$$

Remarque : I_0 correspond au seuil d'audibilité.

Le niveau sonore L d'une conversation normale d'intensité $I = 10^5 I_0$ vaut :

$$L = 10 \log 10^5 = 10 \times 5 = 50 \text{ décibels}$$