Calcul du volume d'un solide de révolution

1 Présentation d'une méthode de calcul

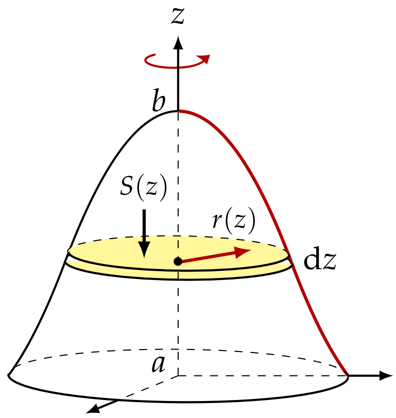
Une méthode pour déterminer le volume d'un solide, consiste à découper celui-ci par des plans parallèles. On intègre ensuite les aires des surfaces obtenues par ce découpage suivant l'axe normal à ces plans.

Solide de révolution : solide engendrée par une surface de révolution

Surface de révolution : surface engendrée par une courbe (directrice) tournant autour d'un axe.

Si l'axe (Oz) est l'axe de révolution, le volume V du solide de révolution est égal à :

$$\mathrm{V} = \int_a^b S(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b \pi\, r^2(z)\,\mathrm{d}z$$



2 Volume d'une sphère

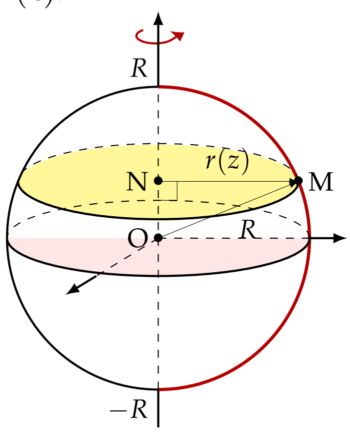
On découpe la sphère avec des plan perpendiculaires à l'axe (Oz). Les surfaces obtenues sont des disques de rayon $r(z)$ d'aire : $S(z) = \pi\, r^2(z)$.

Dans OMN rectangle en N, d'après le théorème de Pythagore : $r^2(z) = R^2 - z^2$.

On obtient alors le volume de la sphère :

$$V = \int_{-R}^{R} S(z)\mathrm{d}z \overset{\text{symétrie}}{=} 2\int_0^R \pi(R^2 - z^2)\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi\left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_0^R = 2\pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$



3 Volume d'un cône

On découpe le cône d'axe (Oz) avec des plans perpendiculaires à l'axe (Oz). Les surfaces obtenues sont alors des disques de rayon $r(z)$.

Dans OBB' les droites (AA') et (BB') sont parallèles, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{AA'}}{\mathrm{BB'}} \Leftrightarrow \frac{z}{h} = \frac{r(z)}{R} \Leftrightarrow r(z) = \frac{Rz}{h}$$

On obtient ainsi le volume du cône :

$$\mathrm{V} = \int_0^h \pi\, r^2(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^h \pi\frac{R^2z^2}{h^2}\mathrm{d}z = \frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h z^2\mathrm{d}z$$

$$= \frac{\pi R^2}{h^2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi R^2}{h^2}\left(\frac{h^3}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$