Somme de variables aléatoires, concentration, loi des grands nombres

Somme de variables indépendantes

Exercice 1

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur un même univers fini.

La loi de probabilité de X est donnée ci-contre et on a pour la variable Y : $E(Y) = 2,5$ et $V(Y) = 1,2$.

x_i	0	3
$p(X = x_i)$	0,4	0,6

Calculer : $\mathrm{E}(X+Y)$, $\mathrm{E}(3Y)$ et $\mathrm{V}(X+Y)$.

Exercice 2

Soit X et Y deux variables aléatoires et indépendantes dont les lois de probabilités sont données dans les tableaux ci-dessous :

x_i	-2	0	3	4
$p(X = x_i)$	0,4	0,2	0,3	0,1

y_i	-5	10	20
$p(Y = y_i)$	0,35	0,45	0,1

1) Calculer $\mathrm{E}(X+Y)$.

2) $\mathrm{V}(X+Y)$.

3) Déterminer une valeur approchée de $\sigma(X+Y)$ à 10^{-2} près.

Exercice 3

On lance un dé tétraédrique équilibré dont les faces portent les montants en € :

$$-4 \;;\; 1 \;;\; 2 \text{ et } 3$$

Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique en € affiché.

1) Calculer $\mathrm{E}(X)$, interpréter ce résultat puis calculer $\mathrm{V}(X)$.

2) On décide de doubler chacun des montants (par exemple 3 devient 6).
Soit Z la variable aléatoire donnant le gain algébrique en € de ce deuxième jeu.
Exprimer Z en fonction de X puis en déduire $\mathrm{E}(Z)$ et $\mathrm{V}(Z)$.

3) On décide enfin d'ajouter 2 à chacun des montants (par exemple 3 devient 5).
Soit Y la variable aléatoire donnant le gain algébrique en € de ce troisième jeu.
Exprimer Y en fonction de X puis en déduire $\mathrm{E}(Y)$ et $\sigma(Y)$.

Exercice 4

On tire au hasard et avec remise 3 cartes dans un jeu de 52 cartes.
On gagne 7 € par as obtenu, 4 € par valet, dame ou roi obtenu et on perd 1 € pour n'importe quelle autre carte obtenue.
Si on tire : as de pique, 7 de trèfle et valet de carreau, on gagne : $7 - 1 + 4 = 10$ €.
On note Z la variable aléatoire donnant le gain algébrique total à ce jeu.

Décomposer Z sous la forme d'une somme de trois variables aléatoires que l'on définira puis calculer $\mathrm{E}(Z)$.

EXERCICE 5

Les jours où elle s'entraîne au jet de 7 mètres au handball, Elia fait 30 tirs le matin et 50 l'après-midi. Elle marque avec une probabilité égale à 0,46 le matin et une probabilité égale à 0,78 l'après-midi. Tous les tirs sont supposés indépendants.
Soit X (respectivement Y) la variable aléatoire donnant le nombre de tirs réussis par Elia le matin (respectivement l'après-midi).

1) Donner la loi suivie par X et celle suivie par Y.
2) Que représente X + Y ?
3) Calculer E(X + Y) et en donner une interprétation.

Échantillons

EXERCICE 6

Une loterie comporte un très grand nombre de billets valant chacun 1 €.
Parmi ces billets, 0,2 % sont des billets gagnants à 100 €, 1 % à 50 €, 2 % à 10 € et les autres sont perdants.
Manon, qui est la première à choisir ses billets, en prend 3 au hasard.
On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique d'un ticket et S la variable aléatoire donnant le gain algébrique de Manon.

1) Donner un argument permettant de considérer que les 3 billets de Manon sont le résultat d'un tirage avec remise.
2) Sous cette condition, donner la loi de X et calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\sigma(X)$.
3) En déduire le gain que pourrait espérer en moyenne Manon en tirant 3 billets et l'écart-type de S.

Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et de concentration

EXERCICE 7

La consommation d'eau quotidienne en litres d'une ou un français pris au hasard dans la population est donnée par une variable aléatoire C telle que $\mathrm{E}(C) = 150$ et $\mathrm{V}(C) = 900$.

1) Justifier qu'au moins 75 % de la population française consomme entre 90 et 210 litres d'eau par jour.
2) Est-il vrai de dire « la probabilité que l'écart entre C et 150 soit strictement inférieur à 90 litres est supérieure à 0,85 ».

EXERCICE 8

Une lanceuse de fléchettes met dans « le mille » 60 % du temps et on suppose que tous ses lancers sont indépendants.

1) Quelle loi suit la variable X donnant le nombre de lancers dans « le mille » sur 20 tentatives ?
2) a) Quand on lui demande combien elle pense mettre de lancers dans le mille, elle répond « moins de 16 mais plus de 8 ».
   En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donner une minoration de la probabilité qu'elle ait raison.

b) Calculer $p(8 < X < 16)$ en utilisant la loi binomiale puis discuter la minoration obtenue à la question 2.a).

Exercice 9

On considère une usine fabriquant des montres à aiguilles sans trotteuse. Les deux aiguilles sont fabriquées indépendamment.
Les variables aléatoires donnant la masse de l'aiguille en grammes sont :

- X pour les heures d'espérance 3 et d'écart-type 0,15 ;
- Y pour les minutes d'espérance 2 et d'écart-type 0,1.

1) Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z donnant la masse totale des deux aiguilles.
2) Pour que la montre soit bien équilibrée, la masse des deux aiguilles doit être comprise entre 4,4 g et 5,6 g.
   Que peut-on dire de la probabilité que ce soit le cas ?

Exercice 10

Un objet est fabriqué dans une usine de sorte qu'il mesure très exactement 9,5 cm.

Lorsqu'une personne mesure cet objet, on considère que la variable aléatoire X donnant le résultat de la mesure en cm a pour espérance 9,5 et pour variance 0,04.

On fait mesurer indépendamment cet objet à 35 étudiants d'une même classe.

1) Majorer la probabilité que la moyenne M des mesures effectuées diffère de 9,5 de 0,5 cm ou plus.
2) a) Minorer $p(|M - 9,5| < 0,2)$.
   b) Interpréter concrètement cette minoration.

Exercice 11

Dans un avion, une personne est autorisée à mettre en soute un bagage de 23 kg ou moins, sans pénalité.
Une compagnie aérienne a compilé la masse de tous les bagages enregistrés sur une année et a constaté que la masse d'un bagage est donnée en kg par une variable aléatoire X d'espérance 22 et d'écart-type 0,4.

1) Sur un avion de 500 passagers supposés indépendants, on appelle X_i la masse de bagage du passager i et M la variable aléatoire donnant la moyenne des masses des bagages des 500 passagers.
   a) Exprimer M en fonction des X_i.
   b) Minorer la probabilité que $M \in]21,5\,;\,22,5[$
2) Si la masse totale de bagages est inférieure ou égale à 10,5 tonnes alors l'avion embarque des bagages d'un autre vol et si la masse totale de bagages est supérieure ou égale à 11,5 tonnes alors une partie des bagages de l'avion est envoyée sur un autre vol.
   Majorer la probabilité que cet avion contienne des bagages d'un autre vol ou ne contienne pas les bagages de tous ses passagers.

Exercice 12

Amir distribue tous les jours des prospectus à la sortie du métro.
Les variables aléatoires X_i donnant le nombre de prospectus distribués le i-ième jour sont indépendantes et de même loi d'espérance 250 et de variance 100.

Au bout de combien de jours peut-il être sûr au risque de 5 % d'avoir distribué en moyenne entre 245 et 255 prospectus par jour ?

Exercice 13

On lance une pièce truquée de sorte que la probabilité d'obtenir PILE est 0,6.

1) On lance n fois cette pièce et on appelle X_i la variable aléatoire donnant le nombre de PILE obtenus au i-ième lancer.
   a) Justifier que X_i suit une loi de Bernoulli.
   b) Déterminer $\mathrm{E}(X_i)$ et $\mathrm{V}(X_i)$.
2) On cherche à déterminer un nombre de lancers à partir duquel on est sûr au seuil de 95 % qu'il y a plus de PILE que de FACE.
   a) On appelle M_n la variable aléatoire donnant la moyenne des n premiers X_i.
   Quel est le plus grand intervalle I de la forme $]0,6-\delta\ ;\ 0,6+\delta[$ tel que $M_n \in \mathrm{I}$ implique qu'il y ait eu plus de PILE que de FACE ?
   b) À l'aide de l'inégalité de concentration, déterminer à partir de combien de lancers on peut être sûr au seuil de 95 % que $M_n \in \mathrm{I}$. On appellera n_0 ce nombre de lancers.
   c) En utilisant la loi binomiale, calculer la probabilité qu'il y ait plus de PILE que de FACE quand on lance n_0 fois cette pièce. Commenter.

Exercice 14

On considère une variable aléatoire X d'espérance 10 et de variance 4.

1) Trouver $\delta > 0$ tel que $\dfrac{\mathrm{V}(X)}{\delta^2} \leqslant 0,02$
2) En déduire sans calcul que pour ces valeurs de δ, on a $p(|X-10| \geqslant \delta) \leqslant 0,02$.

Exercice 15

Un joueur de rugby s'entraîne à tirer des pénalités. On considère que la variable aléatoire X donnant le nombre de pénalités réussies sur les 100 tentées suit une loi d'espérance 70 et de variance inconnue.

Sachant que la probabilité qu'il réussisse entre 0 et 60 ou entre 80 et 100 pénalités est supérieure à 0,1, déterminer une minoration de $\mathrm{V}(X)$.