Vecteurs, droites et plans dans l'espace

Table des matières

-

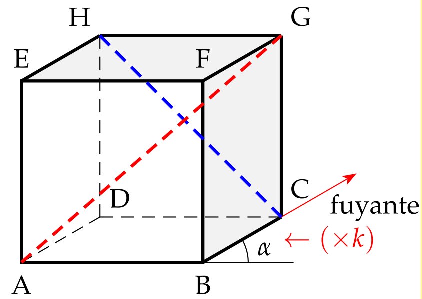
1 Rappels de géométrie euclidienne

1.1 Perspective cavalière

Définition 1 : La **perspective cavalière** est une manière de représenter en deux dimensions des objets en volume. Cette représentation ne présente pas de point de fuite : la taille des objets **ne diminue pas lorsqu'ils s'éloignent**.

Dans cette perspective, deux des axes sont orthogonaux (vue de face en vraie grandeur) et le troisième axe est incliné d'un angle α compris entre 30° et 60° par rapport à l'horizontale, appelé "angle de fuite". Les mesures sur cet axe sont multipliées par un facteur de réduction k compris entre 0,5 à 0,7.

⚠ Cette perspective ne donne qu'une indication sur la profondeur de l'objet.



représentation du cube ABCDEFGH

⚠ La perspective cavalière **ne conserve pas** :

- la mesure : deux segments de même longueur peuvent être représentés par deux segments de longueurs différentes (AB $\neq$ AD) ;
- les angles en particulier deux droites perpendiculaires peuvent être représentées par deux droites non perpendiculaires ((AB) $\not\perp$ (AD))
- Ainsi un carré peut être représenté par un parallélogramme (AEHD) !

⚠ Deux droites peuvent se couper sur la perspective sans être sécantes !
Les droites (HC) et (AG) ne sont pas sécantes.

⚠ Par contre, cette perspective **conserve** :

- le parallélisme : 2 droites parallèles sont représentées par 2 droites parallèles ;
- le milieu ou tout autre division d'un segment.

1.2 Le plan

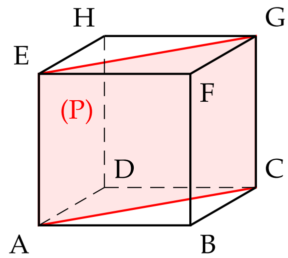
Définition 2 : Trois points non alignés définissent un plan (P).

Si (P) est défini par A, B, C alors (P) est noté (ABC).

Deux droites sécantes ou strictement parallèles définissent également un plan (P).

Exemple : Dans le cube ABCDEFGH le plan (P) est défini par :

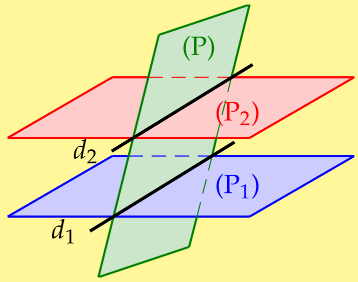
- les points A, E, C : (P) = (AEC)
- les droites (EC) et (AG).
- les droites (AE) et (CG)



1.3 Parallélisme de deux plans

Théorème 1 : Un plan (P) coupe deux plans parallèles (P_1) et (P_2) en deux droite parallèles.

$$\left.\begin{array}{l}(P_1) \;/\!/\; (P_2)\\ (P)\cap(P_1) = d_1\\ (P)\cap(P_2) = d_2\end{array}\right\} \Rightarrow d_1 \;/\!/\; d_2$$



1.4 Section d'un cube ou d'un tétraèdre par un plan

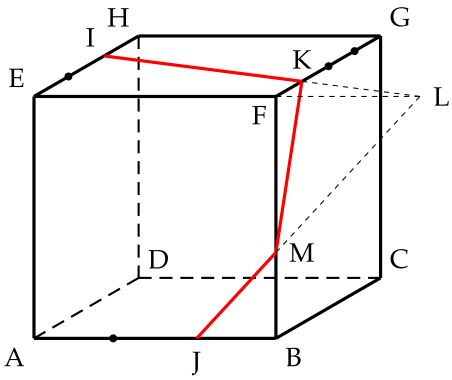
Principe pour déterminer la section du cube ou d'un tétraèdre par un plan (P)

- L'intersection, lorsqu'elle existe, d'une face par le plan (P) est un segment.
- Deux points M et N du plan (P) peuvent être reliés uniquement si M et N appartiennent au plan d'une même face. Le segment [MN] donne l'intersection de (P) avec de cette face.
- La section du cube par le plan (P) est un polygone.

1.4.1 Section d'un cube par un plan

Déterminer la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) tel que :

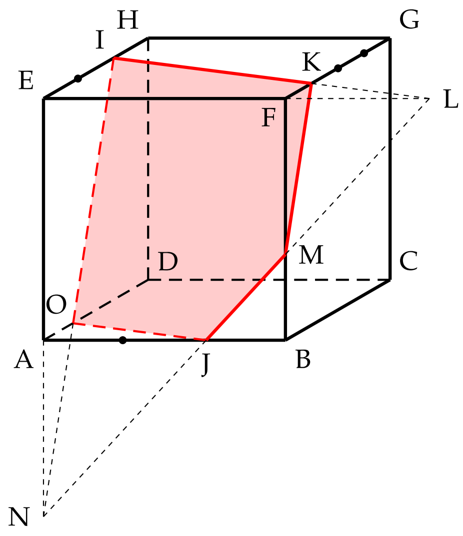
$$\overrightarrow{EI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}, \quad \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{FK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$$



- On trace le cube et on place les point I, J et K.
- On trace [IK] qui est l'intersection du plan (IJK) avec la face du haut EFGH.
- On ne peut pas relier J à I ou K car ces segments ne sont pas sur une face du cube.
- On cherche l'intersection de (IJK) avec la face avant ABFE. Pour cela, on détermine l'intersection de la droite (IK) avec la droite (EF) qui contient l'arête [EF] appartenant aux faces EFGH et ABFE. On note L leur point d'intersection. $L \in (IK)$ donc $L \in (IJK)$.
- Comme $L \in (EF)$, donc L appartient au plan (EFB) contenant la face ABFE. On trace alors la droite (JL) dans le plan (EFB) qui coupe [FB] en M.
  $M \in (JL)$ donc $M \in (IJK)$.
- Ainsi [JM] et [KM] constituent les intersections du plan (IJK) avec les faces avant ABFE et de droite BCGF. On trace ces segments.

On réitère cette opération pour la face gauche ADHE et la face du dessous ABCD :

- On détermine l'intersection de la droite (MJ) avec la droite (AE) qui contient l'arête [AE] appartenant aux faces ADHE et ABFE. On note N leur point d'intersection. N ∈ (MJ) donc N ∈ (IJK).
- Comme N ∈ (AE), alors N appartient au plan (EAD) contenant la face ADHE. On trace alors la droite (NI) dans le plan (EAD) qui coupe [AD] en O. Comme O ∈ (NI), O ∈ (IJK).
- [OI] et [OJ] constituent les intersections du plan (IJK) avec les faces de gauche ADHE et de dessous ABCD. On trace ces segments en pointillé car ces segments sont sur des faces cachées.
- La section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est le pentagone IKMJO.



Remarque : Les faces EFGH et ABCD sont parallèles. Le plan (IJK) coupe ces faces en des segments parallèles. De même pour les faces BCGF et ADHE.

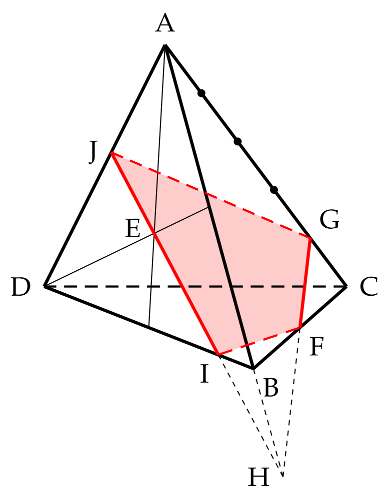
On a donc : (IK) // (OJ) et (KM) // (IO).

1.4.2 Section d'un tétraèdre par un plan

Déterminer la section du tétraèdre ABCD par le plan (EFG) tel que :

$$\text{E centre de gravité du triangle ABD} \ , \ \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA}$$

- On trace un tétraèdre et l'on place le point E comme intersection des médianes du triangle ABD et les points F et G.
- On trace [GF] qui est l'intersection du plan (EFG) avec la face ABC.
- On ne peut pas relier E à F ou G car ces segments ne sont pas sur une face du tétraèdre.
- On cherche l'intersection de (EFG) avec la face ABD. Pour cela, on détermine l'intersection de la droite (GF) avec la droite (AB) qui contient l'arête [AB] appartenant aux faces ABC et ABD. On note H leur point d'intersection.
  H ∈ (GF) donc H ∈ (EFG).



- Comme H ∈ (AB), donc H appartient au plan (ABD) contenant la face ABD. On trace alors la droite (HE) qui coupe [BD] en I et [AD] en J. Comme I ∈ (HE) et J ∈ (HE) alors I ∈ (EFG) et J ∈ (EFG).
- Ainsi [IJ], [FI] et [JG] constituent les intersections du plan (EFG) avec les faces ABD, BCD et ADC. On trace le segment [IJ] et les segment [FI] et [JG] en pointillé car sur des faces cachées.
- La section du tétraèdre ABCD par le plan (EFG) est le quadrilatère GFIJ.

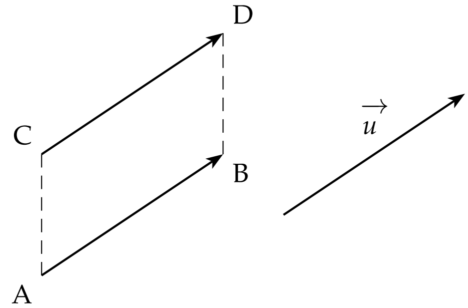
2 Géométrie vectorielle

2.1 Définition d'un vecteur dans l'espace

On étend la notion de vecteur dans le plan à l'espace.

Un vecteur $\vec{u}$ ou son représentant $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

- une direction : la droite (AB) ;
- un sens : de A vers B ;
- une norme, notée $||\vec{u}||$: distance AB



Théorème 2 : Égalité de deux vecteurs.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Leftrightarrow \quad \text{ABDC parallélogramme}$$

On définit les deux opérations suivantes :

- L'**addition** par la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
  La somme de vecteurs de même origine se construit par un parallélogramme.
  L'addition de deux vecteurs est commutative et associative.
  Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est un vecteur de norme nulle.
  L'opposé d'un vecteur $\vec{u}$ ou $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur noté $-\vec{u}$ ou $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

- Le **produit par un scalaire** : soit un réel λ et le vecteur $\vec{v} = \lambda\vec{u}$
  $\vec{v}$ a la même direction que le vecteur $\vec{u}$
  $\vec{v}$ a le même sens que $\vec{u}$ si $\lambda > 0$ et un sens contraire si $\lambda < 0$
  $||\vec{v}|| = |\lambda| \times ||\vec{u}||$

- **Bilinéarité** : $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + b\vec{v}$ et $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Exemple : Soit un tétraèdre ABCD. On considère les points I, J, K, L définis par :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$$

Faire une figure puis montrer que IJKL est un parallélogramme

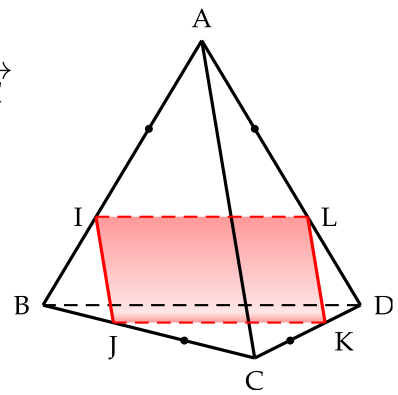
D'après les relations vectorielles :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

On a de même :

$$\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$$
$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

Donc : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ et donc IJKL est un parallélogramme.

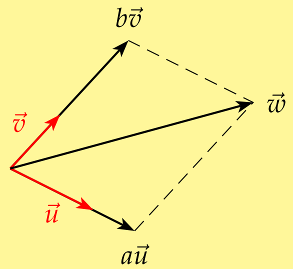


Définition 3 : **Combinaison linéaire de deux vecteurs.**

On appelle combinaison linéaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ tel que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont alors coplanaires



2.2 Colinéarité

Définition 4 : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ ou si l'un d'eux est nul.

⚠ On ne dit pas que des vecteurs sont parallèles mais colinéaires.

Remarque : Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

Théorème 3 : De la colinéarité, on déduit que :

- les points A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow$ $\exists k \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$
- les droites (AB) et (CD) sont parallèles $\Leftrightarrow$ $\exists k \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB}$

Remarque : La colinéarité est donc l'outil permettant de montrer l'alignement et le parallélisme.

2.3 Droite

Définition 5 : Une droite est définie par un point et un vecteur directeur.

La droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires.

La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}\,,\ k \in \mathbb{R}$

2.4 Coplanarité

Définition 6 : Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si, on peut exprimer le vecteur $\vec{w}$ comme combinaison linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$\vec{u},\ \vec{v}, \vec{w} \text{ coplanaires} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$$

Remarque : Ainsi les points A, B, C et D sont coplanaires si, et seulement si :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{AD} = a\,\overrightarrow{AB} + b\,\overrightarrow{AC}$$

2.5 Plan

Théorème 4 : Plan et base

Un plan est défini par un point et un couple de vecteurs non colinéaires.

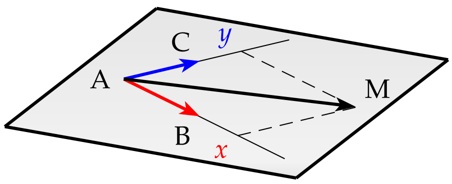
Le plan (P) passant par A et de vecteurs directeurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ soit une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On dit que le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ forme une base du plan (P).

Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC} \quad (x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$$

$(x\,;\,y)$ sont les coordonnées du point M dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ du plan (ABC)

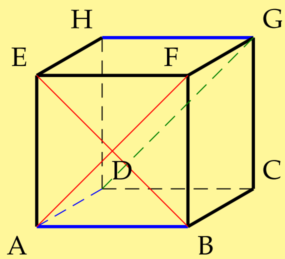


3 Relations entre droites et plans

3.1 Relations entre deux droites

Propriété 1 : Deux droites, dans l'espace, peuvent être :

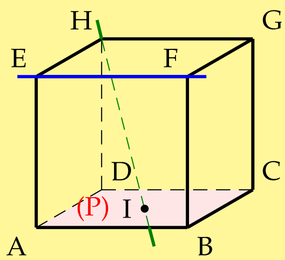
- **sécantes**, si ces deux droites se coupent en un point, par exemple (AF) et (BE) ;
- **parallèles**, si ces deux droites sont **coplanaires** et n'ont aucun point commun ou si ces deux droites sont confondues, par exemple (AB) et (HG) ;
- **non coplanaires** par exemple (AB) et (DG).



3.2 Relations entre une droite et un plan

Propriété 2 : Une droite et un plan peuvent être :

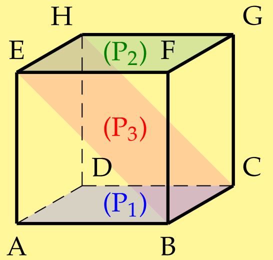
- **parallèles** : si la droite et le plan n'ont aucun point commun ou si la droite est contenue dans le plan, par exemple (EF) et (P) ;
- **sécantes** : si la droite et le plan ont un seul point commun, par exemple (HI) et (P).



3.3 Relation entre deux plans

Propriété 3 : Deux plans peuvent être :

- **parallèles** : si les deux plans n'ont aucun point commun ou si les deux plans sont confondus, par exemple (P_1) et (P_2)
- **sécants** : si les deux plans ont une droite en commun, par exemple (P_1) et (P_3) d'intersection (BC).



3.4 Parallélisme

Théorème 5 : Parallélisme de droites et de plans

- Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.
- Deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre.

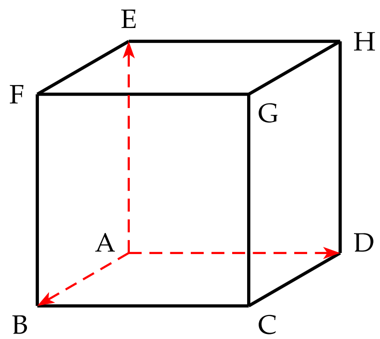
4 Repérage dans l'espace

4.1 Base et repère

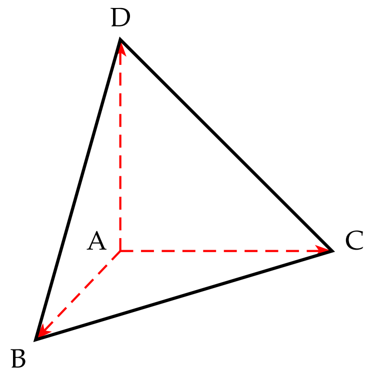
Définition 7 : Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ **non coplanaires** forment une base de l'espace. On note alors cette base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Un point A et une base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme un repère de l'espace, noté $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

Remarque : Un repère dans l'espace est parfois appelé trièdre car formé par trois faces d'un cube ou d'un tétraèdre.



Repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$



Repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$

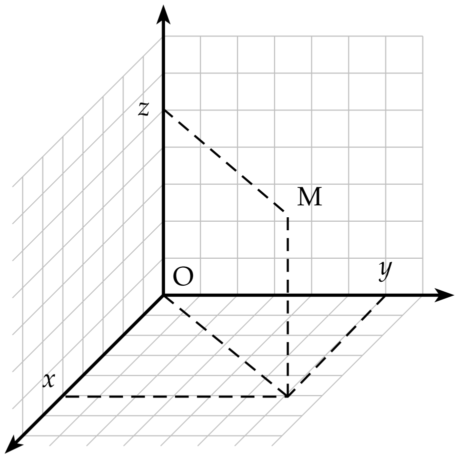
4.2 Coordonnées d'un point

Théorème 6 : Soit la base $(\vec{\imath}\,, \vec{\jmath}\,, \vec{k})$ et un repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace.

- Tout point M de l'espace est alors défini, de façon unique, par :
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \quad (x\,;\,y\,;\,z) \in \mathbb{R}^3$$
- Les trois réels $(x\,;y\,;z)$ sont appelés coordonnées du point M dans $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Ces coordonnées sont appelés abscisse, ordonnée et cote.
- La base $(\vec{\imath}\,, \vec{\jmath}\,, \vec{k})$ et le repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont orthonormés si, et seulement si,
$$||\vec{\imath}|| = ||\vec{\jmath}|| = ||\vec{k}|| = 1 \quad \text{et} \quad \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k} \text{ mutuellement orthogonaux}$$

En généralisant les relations du plan :

- $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}\,;\,y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}\,;\,z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A})$
- Si I est le milieu de [AB] :
$$\mathrm{I} = \left(\frac{x_\mathrm{B} + x_\mathrm{A}}{2}\,;\,\frac{y_\mathrm{B} + y_\mathrm{A}}{2}\,;\,\frac{z_\mathrm{B} + z_\mathrm{A}}{2}\right)$$
- $\vec{u} = (a\,;\,b\,;\,c)$
alors dans un repère **orthonormé** :
$||\vec{u}|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$



Exemple : Soit les points A(2 ; 0 ; 1), B(1 ; −2 ; 1), C(5 ; 5 ; 0), D(−3 ; −5 ; 6).
Montrer que A, B et C ne sont pas alignés et que A, B, C et D sont coplanaires

- A, B, C non alignés, si, et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ non colinéaires.
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1\,;-2\,;\,0) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (3\,;\,5\,;-1)$$
Les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ne sont pas proportionnelles, par exemple en observant la 3e coordonnée des deux vecteurs : -1 n'est pas un multiple de 0.
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

- A, B, C, D coplanaires si, et seulement si, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ combinaison linéaire de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. Il faut donc déterminer a et b telles que : $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = a\overrightarrow{\mathrm{AB}} + b\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
On a $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (-5\,;-5\,;\,5)$. En identifiant, on obtient le système suivant :
$$a\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 3b = -5 \\ -2a + 5b = -5 \\ -b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 \\ -a - 15 = -5 \\ -2a - 25 = -5 \end{cases}$$
D'où $a = -10$ et $b = -5$. Les points A, B, C et D sont coplanaires.

Remarque : Pour déterminer a et b, il faut résoudre un système à trois équations à deux inconnues. Une équation peut alors être incompatible avec les deux autres. Dans ce cas les coefficients a et b n'existent pas.

Exemple : Soit les points A(6 ; 8 ; 2) ; B(4 ; 9 ; 1) ; C(5 ; 7 ; 3) dans un repère orthonormé. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

Par la réciproque du théorème de Pythagore. On calcule les longueurs suivantes

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= (-2\,;\,1\,;-1) &\Rightarrow\quad AB^2 &= 4+1+1=6\\
\overrightarrow{AC} &= (-1\,;-1\,;\,1) &\Rightarrow\quad AC^2 &= 1+1+1=3\\
\overrightarrow{BC} &= (1\,;-2\,;\,2) &\Rightarrow\quad BC^2 &= 1+4+4=9
\end{aligned}$$

Donc $AB^2 + AC^2 = 6+3 = 9 = BC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

5 Représentation paramétrique

5.1 Représentation paramétrique d'une droite

Théorème 7 : Soit une droite d définie par un point $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(a\,;\,b\,;\,c)$.

La droite d admet alors un système d'équations paramétriques, appelé **représentation paramétrique**, de la forme :

$$d\ :\ \begin{cases} x = x_A + a\,t\\ y = y_A + b\,t\\ z = z_A + c\,t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}$$

Démonstration : Soit un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ de d, alors $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires :

$$\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}\ \text{ avec }\ t\in\mathbb{R}$$

On obtient le système suivant : $\begin{cases} x - x_A = a\,t\\ y - y_A = b\,t\\ z - z_A = c\,t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + a\,t\\ y = y_A + b\,t\\ z = z_A + c\,t\end{cases}$

Remarque :

- Pour une demi-droite, $t \in]-\infty\,;\,\alpha]$ ou $t\in[\alpha\,;+\infty[$ et un segment $t\in[\alpha\,;\,\beta]$.
- La représentation paramétrique d'une droite **n'est pas unique**. On peut prendre un autre point sur la droite et un autre vecteur directeur colinéaire au premier.

5.2 Applications

Donner une représentation paramétrique de la droite d définie par :

$$A(2\,;\,1\,;-1)\quad\text{et}\quad\vec{u}(0\,;\,1\,;-1)$$

La droite d a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2\\ y = 1+t\\ z = -1-t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}$

A et B ont pour coordonnées respectives : $A(-2\,;\,1\,;\,0)$ et $B(2\,;\,3\,;1)$

Donner une représentation paramétrique de chacun des ensembles suivants :

- La droite (AB)
- Le segment $[AB]$
- La demi-droite $[BA)$

Un vecteur directeur de la droite (AB) est : $\overrightarrow{AB} = (4\,;\,2\,;\,1)$.

- La droite (AB) a pour représentation paramétrique :

$$(AB)\quad \begin{cases} x = -2+4t \\ y = 1+2t \\ z = t \end{cases},\quad t \in \mathbb{R}$$

- Pour déterminer l'intervalle du paramètre t pour le segment [AB], le point A est défini avec $t = 0$ et le point B avec $t = 1$. On a donc :

$$[AB]\quad \begin{cases} x = -2+4t \\ y = 1+2t \\ z = t \end{cases},\quad t \in [0\,;\,1]$$

- Pour la demi droite [BA). Le paramètre t doit être inférieur à 1 pour contenir A. On a donc :

$$[BA)\quad \begin{cases} x = -2+4t \\ y = 1+2t \\ z = t \end{cases},\quad t \in]-\infty\,;\,1]$$

Les systèmes suivants sont-ils associés à une même droite ?

$$\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t \\ z = 1-3t \end{cases},\quad t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x = \ \ 3-6s \\ y = -3s+2 \\ z = \ \ 9s-5 \end{cases},\quad s \in \mathbb{R}$$

Soit d_1 et d_2 les droites associées à ces systèmes. On a $d_1 = d_2$ si leurs vecteurs directeurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont colinéaires et si d_1 et d_2 ont un point commun.

- À l'aide de ces systèmes, on déduit comme vecteurs directeurs respectifs :

$$\vec{u_1} = (2\,;\,1\,;-3) \quad \text{et} \quad \vec{u_2} = (-6\,;-3\,;\,9)$$

D'où : $\vec{u_2} = -3\vec{u_1}$. Les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont colinéaires.

- Prenons un point de d_1, par exemple avec $t = 0$, on obtient $A(-1\,;\,0\,;\,1)$. Cherchons à déterminer s pour que A soit sur d_2, d'où :

$$\begin{cases} 3-6s = -1 \\ -3s+2 = 0 \\ 9s-5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad s = \frac{2}{3} \ \text{vérifié dans les 3 équations}$$

On peut déterminer s donc A est sur d_2. On en déduit que $d_1 = d_2$.

On donne les droites d_1 et d_2 de représentations paramétriques suivantes :

$$d_1 : \begin{cases} x = 6 - 3s \\ y = -7 + 2s \\ z = -1 + s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad d_2 : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -3 \\ z = -5 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Démontrer que ces droites sont sécantes et déterminer leur point d'intersection.

Les droites d_1 et d_2 sont sécantes si elles possèdent un unique point commun.
On résout alors le système suivant :

$$\begin{cases} 6 - 3s = -3 + t \quad (1) \\ -7 + 2s = -3 \quad (2) \\ -1 + s = -5 + 2t \quad (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{de } (2)\ s = 2 \\ \text{de } (1)\ t = 9 - 3s \\ \text{de } (3)\ 2t = 4 + s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 2 \\ t = 3 \\ (3) \text{ vérifiée} \end{cases}$$

Les droites d_1 et d_2 sont sécantes en $\mathrm{I}(0\,; -3\,;\ 1)$

5.3 Représentation paramétrique d'un plan

Théorème 8 : Soit un plan (P) défini par un point $\mathrm{A}(x_A\,;\ y_A\,;\ z_A)$ et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}(a\,;\ b\,;\ c)$ et $\vec{v}(\alpha\,;\ \beta\,;\ \gamma)$.

Le plan (P) admet alors un système d'équations paramétriques, appelé **représentation paramétrique**, de la forme :

$$(\mathrm{P}) : \begin{cases} x = x_\mathrm{A} + a\,t + \alpha\,s \\ y = y_\mathrm{A} + b\,t + \beta\,s \\ z = z_\mathrm{A} + c\,t + \gamma\,s \end{cases}, \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2$$

Démonstration : Soit un point $\mathrm{M}(x\,;\ y\,;\ z)$ du plan (P) alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\vec{u} + s\vec{v} \ \text{ avec } \ (t, s) \in \mathbb{R}^2, \ \text{d'où le système.}$$

⚠ La représentation paramétrique d'un plan **n'est pas unique**.

Exemple : Soit les points $\mathrm{A}(-1\,;\ 2\,;\ 5)$; $\mathrm{B}(1\,;\ 0\,; -2)$ et $\mathrm{C}(0\,;\ 2\,; -3)$.

Montrer que les points A, B, C définissent un plan dont on donnera une représentation paramétrique.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2\,; -2\,; -7)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1\,;\ 0\,; -8)$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ne sont pas colinéaires. Les points A, B et C définissent le plan (ABC).

Une représentation paramétrique du plan (ABC) est :

$$\begin{cases} x = -1 + 2t + s \\ y = 2 - 2t \\ z = 5 - 7t - 8s \end{cases}, \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2$$