

SÉANCE 1 : FONCTIONS ET SUITES

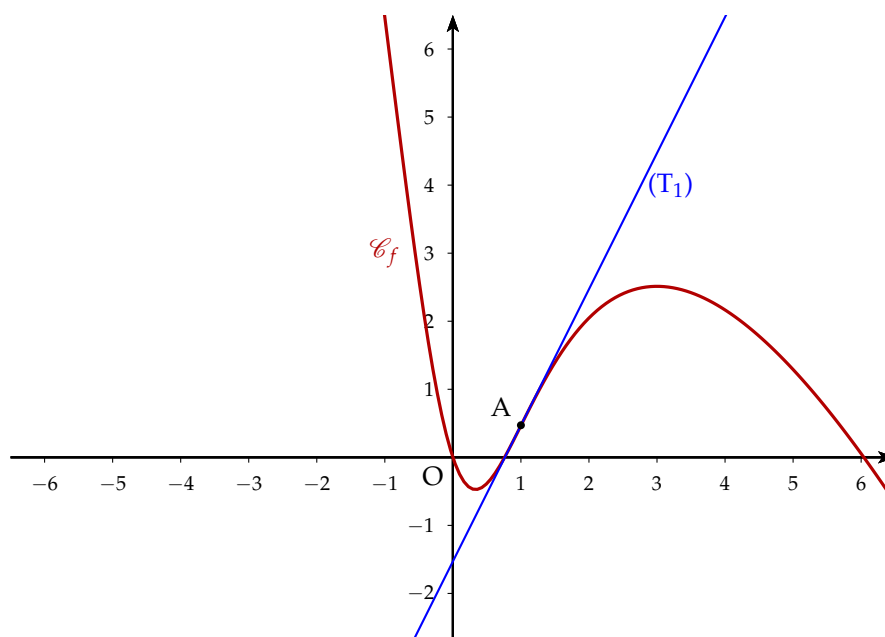
EXERCICE 1

Amérique du Nord mai 2026 sujet 1

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 5 \ln(x^2 + 1) - 3x$.
et on admet que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} .

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On a tracé la courbe \mathcal{C}_f et la tangente (T_1) à la courbe \mathcal{C}_f au point A d'abscisse 1.



- 1) Conjecturer, à l'aide de la représentation graphique de la fonction f , les intervalles de \mathbb{R} sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.
- 2) Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $-\infty$.
- 3) a) Démontrer que, pour tout x réel strictement positif,

$$f(x) = x \left(10 \frac{\ln x}{x} - 3 \right) + 5 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$$
 b) Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $+\infty$.
- 4) a) Démontrer que pour tout x réel, $f'(x) = \frac{-3x^2 + 10x - 3}{x^2 + 1}$.
b) Étudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
- 5) On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} .
 - a) Montrer que pour tout réel x , $f''(x) = \frac{-10x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2}$.
 - b) Valider ou rejeter la conjecture faite à la question 1).
 - c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A d'abscisse 1.
 - d) En déduire que pour tout $x \geq 1$, $\ln(x^2 + 1) \leq x + \ln(2) - 1$.

EXERCICE 2**Amérique du Nord mai 2026 sujet 2****Partie A : étude du sens de variation d'une fonction**

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

2) a) Vérifier que, pour tout réel x , on a $f'(x) = \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur \mathbb{R} .

Partie B : étude de la convergence d'une suite récurrente

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$.

2) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

3) On voudrait retrouver par une autre méthode les résultats de la question B 2).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) En déduire une expression de v_n en fonction de n puis que $u_n = \sqrt{\frac{1,5 \times 4^n}{1 + 0,5 \times 4^n}}$.

c) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Partie C : étude de la convergence de la somme de termes

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2$.

1) Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci permette de lister les p premiers termes de la suite (S_n) .

```

from math import*
def termes(p):
    u = ...
    s = ...
    L = []
    for i in range(p):
        s = ...
        u = ...
        L.append(s)
    return L

```

2) On rappelle que, pour tout entier naturel k , on a $1 \leq u_k \leq \sqrt{3}$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $n \leq S_n \leq 3n$.

3) En déduire les limites respectives de S_n et de $\frac{S_n}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.