Contrôle de mathématiques

Lundi 30 novembre 2020

Exercice 1

Limites **(3 points)**

Déterminer les limites suivantes en justifiant avec soin :

1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-7x+1}{x-3}$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{e^x-3}{(x-1)^2}$ 3) $\displaystyle\lim_{x\to2^-} \sqrt{\frac{5}{2-x}}$

Exercice 2

Continuité **(3 points)**

Soit le fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x\cos\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Rappeler la définition de la continuité en a pour une fonction f.
Que cela signifie-t-il géométriquement ?

2) a) Tracer l'allure de la fonction f pour $x \neq 0$ sur $[-2\,;\,2]$.
(unité graphique 2 cm sur les deux axes)
Que peut-on conjecturer sur la continuité de f en 0 ?

b) Démontrer cette conjecture.

Exercice 3

Vrai-Faux **(5 points)**

Pour les proposition suivantes, préciser si elle est vraie ou non en justifiant votre réponse.

1) **Proposition 1 :** « $\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad f(x) \leqslant \dfrac{2}{x} \quad\Rightarrow\quad \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ».

2) **Proposition 2 :** « $\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad 2+\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant 2+\dfrac{4}{x} \quad\Rightarrow\quad \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ ».

3) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	0 ↘	-1	↗ $+\infty$

Proposition 3 : « L'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ ».

4) On admet que l'équation $x^3+2x-2=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
Proposition 4 : « Une valeur approchée à 10^{-1} près de α est 0,7 ».

EXERCICE 4

Équation, valeur approchée et limite d'une suite **(9 points)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)\,e^{x-4} - 2$.

Partie A

1) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. On admet que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$.
2) Déterminer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
3) a) Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ puis que $\alpha \in [0\,;\,4]$
   b) À l'aide de l'algorithme par dichotomie, donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α ainsi que le nombre de boucles nécessaires à son établissement.
   c) En déduire le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit la suite u_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) a) D'après l'étude de la fonction f, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant -3$.
   b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} \leqslant u_n$.
   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers ℓ.
2) a) Montrer que -2 et 4 sont solutions de l'équation $f(x) = x$.
   b) En déduire la limite ℓ de la suite (u_n).