Devoir de mathématiques

À rendre le mardi 6 avril 2021

EXERCICE 1

Primitives **(5 points)**

Déterminer une primitive pour les fonctions suivantes sur l4intervalle I proposé. On indiquera clairement la forme utilisée pour déterminer la primitive.

1) $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$, $\mathrm{I} =]-1\,;+\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{4}{(3x+1)^2}$, $\mathrm{I} = \left]-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$

3) $f(x) = xe^{-x^2}$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

4) Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,2[$ par : $f(x) = \dfrac{3x^2-5x+2}{x-2}$.

   a) Déterminer les réels a, b, c tel que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$.

   b) En déduire une primitive de f sur $]-\infty\,;\,2[$.

EXERCICE 2

Équation différentielle **(5 points)**

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$..

1) Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de (E).

2) Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' + y = 0$.

3) Démontrer qu'une fonction v, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E) si et seulement si la fonction $(v-u)$ est solution de (E_0).

4) En déduire toutes les solutions de (E).

5) Déterminer la fonction f_2, solution de (E), qui prend la valeur 2 en 0.

EXERCICE 3

Population en voie d'extinction **(6 points)**

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

En 2016, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille. Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2016).

D'après le modèle d'évolution, la fonction f dérivable et strictement positive sur $[0\,;+\infty[$ vérifie l'équation différentielle : (E) : $y' = -\dfrac{1}{20}y(3-\ln y)$.

1) Soit f une fonction dérivable, strictement positive sur $[0\,;+\infty[$ vérifiant (E).

   Montrer que la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0\,;+\infty[$: $g'(t) = \dfrac{1}{20}g(t) - \dfrac{3}{20}$.

2) Donner la solution générale de l'équation différentielle : (H) : $z' = \dfrac{1}{20}z - \dfrac{3}{20}$.

3) En déduire qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in [0\,;+\infty[,\quad f(t) = \exp\left[3 + C\exp\left(\dfrac{t}{20}\right)\right]$..
(la notation exp désigne la fonction exponentielle naturelle $x \mapsto e^x$).

4) La condition initiale $f(0) = 1$ conduit à la fonction f définie par : $f(t) = \exp\left[3 - 3\exp\left(\dfrac{t}{20}\right)\right]$.

a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
b) Déterminer le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.
c) Résoudre dans $[0\,;+\infty[$ l'inéquation $f(t) < 0,02$.
Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

Exercice 4

Dénombrement **(4 points)**

1) On a dénombré 210 classements possibles aux deux premières places d'une course de chevaux. Déterminer le nombre de chevaux au départ.
2) Un groupe de n personnes s'échange 210 poignées de main. Déterminer n.
3) On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 52 cartes.
Déterminer le nombre de tirages différent :
a) contenant 2 carreaux et 3 piques.
b) contenant au moins un roi.
c) contenant exactement 2 rois et exactement 3 piques.