Contrôle de mathématiques

Mercredi 6 octobre 2021

Exercice 1

Suite arithmético-géomérique **(5 points)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 0,75u_n + 5 \end{cases}$

1) Calculer u_1, u_2.
2) On peut montrer que la forme explicite de u_n est : $u_n = -18 \times 0,75^n + 20$.
   a) Déterminer la monotonie de la suite (u_n).
   b) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.
3) Le programme suivant, en Python, doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $u_n \geqslant 19,5$

   Recopier et compléter ce programme afin que le programme renvoie la valeur attendue.

   ⚠ Ne pas répondre sur l'énoncé !

   Rentrer ce programme dans votre calculatrice puis donner la valeur retournée.
   Dans quel intervalle se trouve les termes u_n à partir de cette valeur ?

```
def seuil():
    n=0
    u=.....
    while u.....  :
        u=.....
        n=n+1
    return .....
```

Exercice 2

Somme de termes **(4 points)**

1) Soit la somme $S_1 = 17 + 22 + 27 + 32 + \cdots + 2\,547$
   a) Déterminer le nombre de termes de la somme S_1.
   b) Calculer la valeur de la somme S_1 en rappelant la formule utilisée.
2) $S_2 = 2 + 10 + 50 + 250 + \cdots + 156\,250$
   a) Déterminer le nombre de termes de cette somme S_2
   b) Déterminer la valeur de la somme S_2 en rappelant la formule utilisée.

Exercice 3

Évolution d'une espèce animale **(6 points)**

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 10\,000 \\ u_{n+1} = 0,95u_n + 200 \end{cases}$

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 4\,000$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.
   c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
3) En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.

   Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.

   Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».

   Que pensez-vous de cette affirmation ? **Justifier précisément la réponse**.

   On pourra introduire une suite (p_n) où p_n correspond à population animale l'année $2020 + n$.

EXERCICE 4

Suite auxiliaire **(5 points)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 3} \end{cases}$

1) a) Calculer u_1, u_2 et u_3
   b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ?
2) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est positif et on pose $v_n = u_n^2$
   a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.
   b) Exprimer v_n en fonction de n puis déduire u_n en fonction de n.
   c) Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 50$