Contrôle de mathématiques

Mercredi 28 septembre 2022

EXERCICE 1

QCM **(5 points)**

Cette exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des cinq questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) On donne la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$.
La suite (v_n), définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 2$, est :
   a) arithmétique de raison -2 ; **c)** arithmétique de raison 1 ;
   b) géométrique de raison -2 ; **d)** géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

2) Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_{n+1} = 2w_n - 4$ telle que $w_2 = 8$.
On peut affirmer que :
   a) $w_0 = -2$ **b)** $w_0 = 0$ **c)** $w_0 = 5$ **d)** $w_0 = 10$

3) Un récipient contenant initialement 1 litre d'eau est laissé au soleil.
Toutes les heures, le volume d'eau diminue de 15 %.
Au bout de quel nombre entier d'heures le volume d'eau devient-il inférieur à un quart de litre ?
   a) 2 heures **b)** 8 heures **c)** 9 heures **d)** 13 heures

4) La Somme $38 + 45 + 52 + 59 + \cdots + 1676$ vaut :
   a) 202 252 **b)** 201 395 **c)** 200 538 **d)** 192 465

5) Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$ et $u_0 = 6$.
On peut affirmer que :
   a) La suite (u_n) est constante. **b)** La suite (u_n) est strictement croissante.
   c) La suite (u_n) est strictement décroissante. **d)** La suite (u_n) n'est pas monotone.

EXERCICE 2

Suite homographique **(5 points)**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$.

1) a) Calculer les termes u_1, u_2 et u_3 sous forme de fractions irréductibles.
   b) Que peut-on conjecturer pour la valeur de u_n en fonction de n.

c) **Recopier sur votre copie** (pas sur l'énoncé) puis compléter le programme Python ci-dessous pour qu'il renvoie la valeur de u_n, la valeur de n étant donnée.

```
def u(n):
    u=...
    for i in range(1,...):
        u=...
    return u
```

2) On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$

a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique dont on donnera la raison et le premier terme.

b) En déduire la valeur de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice 3

Traitement d'une maladie **(5,5 points)**

Dans le cadre d'un essai clinique on envisage un protocole de traitement d'une maladie.
Ce protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de $1,8$ mg.
On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.
On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1) a) Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.

b) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.

2) On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 6$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

b) Déterminer l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

c) Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à $5,5$ mg.
Déterminer, en expliquant votre démarche, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

Exercice 4

Une suite définie par une somme de termes **(4,5 points)**

Soit la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par : $u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - n$

1) Justifier que $u_1 = 0$ puis calculer les valeurs de u_2 et u_3 à 10^{-3} près.

2) Montrer pour $n \geqslant 1$ que $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 1$

3) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

4) Proposer un programme par une fonction $u(n)$ en Python permettant de calculer u_n, la valeur de n étant donnée.