Contrôle de mathématiques

Lundi 28 novembre 2022

EXERCICE 1

QCM **(5 points)**

Cette exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des cinq questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1}$ admet pour asymptote la droite d'équation :

a) $x = -2$ **b)** $y = -1$ **c)** $y = -2$ **d)** $y = 0$

2) Que vaut : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

a) -1 **b)** $-\infty$ **c)** 1 **d)** $+\infty$

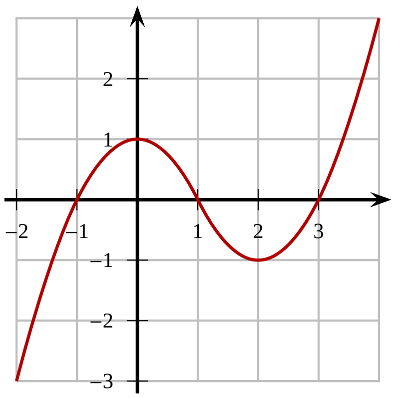
3) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \\ f(0) = 0 \end{cases}$

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
c) f est continue en 0.
d) f n'est pas continue en 0

4) Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$.
Alors sa fonction dérivée f' est telle que :

a) $f'(x) = e^{-x}$
b) $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$
c) $f'(x) = xe^{-x}$
d) $f'(x) = (1 + x)e^{-x}$

5) On donne ci-dessus la **courbe représentative de la dérivée** f' d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2 ; 4]$.



Par lecture graphique de la courbe de f', déterminer l'affirmation correcte pour f :

a) f est décroissante sur $[0 ; 2]$
b) f est décroissante sur $[-1 ; 0]$
c) f admet un minimum en 1 sur $[0 ;2]$
d) f admet un minimum en 3 sur $[2 ; 4]$

EXERCICE 2

Équation du troisième degré **(5 points)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^3 + 3x + 9$

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis déterminer $f'(x)$ que l'on factorisera.
3) Dresser le tableau de variation de f.
4) Démonter que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
5) Donner un encadrement à 10^{-3} de α en expliquant la méthode utilisée puis donner le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3

Limites **(5 points)**

Déterminer les limites suivantes **en se justifiant** avec soin :

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3}{1-x}$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3-5e^x}{1+2e^x}$ 3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-2}{x^2}$ 4) $\displaystyle\lim_{x\to+2^+} \sqrt{\frac{3}{x-2}}$

5) Pour tout réel $x \geqslant 1$, on a $\dfrac{x-1}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \dfrac{1}{x}$ Déterminer la limite de f en $+\infty$

EXERCICE 4

Fonction rationnelle **(5 points)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = x - 3 + \dfrac{1}{x-1}$.
Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1) Donner **sans justification** les limites en $+\infty$, en $-\infty$ et en 1.
   La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote, donner son équation.
2) Déterminer $f'(x)$ que l'on factorisera.
3) Résoudre $f'(x) = 0$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f.
4) Déterminer la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x = 3$.
5) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 2x - 3$?