Devoir de mathématiques

À rendre le mercredi 4 janvier 2023

Exercice 1

Fonction ln **(10 points)**

Partie A : fonction auxiliaire g

Soit la fonction g définie sur $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = 2(x-1) - x\ln x$

1) Calculer $g(1)$ et $g(e)$.
2) Calculer les limites en $+\infty$ et en 0^+ en vous justifiant avec soin.
3) Calculer la fonction dérivée g' sur I.
4) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution évidente sur $]0\,;e]$ et une unique solution α sur $[e\,;+\infty[$.

   b) Donner un encadrement de α à 10^{-3} en expliquant votre démarche.
5) En déduire le tableau de signe de g sur I.

Partie B : étude de la fonction principale

Soit la fonction f définie sur I par : $f(x) = 3x - x\ln x - 2\ln x$.

1) Déterminer les limites en $+\infty$ et en 0^+ en vous justifiant avec soin.
2) a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

   b) En déduire le tableau de variation de f sur I.
3) a) Calculer la dérivée seconde f'' sur I.

   b) Étudier la convexité de f et préciser les coordonnées du point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.
4) Tracer avec soin l'allure de $\mathscr{C}_f$ sur $]0\,;15]$ dans le repère donné en annexe en faisant figurer les extremum et le point d'inflexion J.

Exercice 2

Fonction exponentielle et suite **(10 points)**

Partie A : Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3\,e^x$.

1) Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ en vous justifiant avec soin.
2) Calculer la fonction dérivée f' que l'on mettra en facteur.
3) En déduire les variation de f puis dresser son tableau de variation.
4) On admet que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0,5\,;+\infty[$. Donner un encadrement de α à 10^{-3} en expliquant la méthode utilisée.

Partie B : Étude d'une suite

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Calculer u_1 et u_2. On donnera les valeurs exactes puis les valeurs approchées à 10^{-3}.

2) Soit la fonction u(n) écrite en langage Python :

   Déterminer, sans justifier, la valeur u(2) arrondie à 10^{-3}.

```
from math import*
def u(n):
    u=-1
    for i in range(n):
        u=u**3*exp(u)
    return u
```

3) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$.
4) En déduire que la suite (u_n) converge vers $\ell \leqslant 0$.
5) Déterminer ℓ en vous justifiant. On admettra que l'équation $x^2e^x - 1 = 0$ admet une unique solution et que celle-ci est supérieure à 0,5.

Nom :

Prénom :

Annexe

(À rendre avec la copie)