Contrôle de mathématiques

Lundi 25 mars 2024

EXERCICE 1

QCM **(5 points)**

Pour chacune des cinq questions suivantes,une seule des quatre réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) La fonction ln admet comme primitive sur $]0\,;+\infty[$:

a) $x \mapsto \ln x$ b) $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ c) $x \mapsto x\ln x - x$ d) $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$.
La primitive F de f telle que $F(0) = 1$ a pour expression

a) $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ c) $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$

b) $F(x) = (1+2x^2)\,\mathrm{e}^{x^2}$ d) $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + \dfrac{1}{2}$

3) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$.
Une primitive F sur $]-1\,;\,1[$ de f a pour expression :

a) $F(x) = -\dfrac{1}{2}\ln(1-x^2)$ c) $F(x) = \dfrac{x^2}{2\left(x - \dfrac{x^3}{3}\right)}$

b) $F(x) = \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$ d) $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln(1-x^2)$

4) f une solution de l'équation différentielle $y' = -y + 3$ telle que $f(\ln 2) = 1$ alors :

a) $f(x) = -4\mathrm{e}^{-x} + 3$ c) $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + 3$

b) $f(x) = 8\mathrm{e}^{-x} - 3$ d) $f(x) = -2\mathrm{e}^{-x} - 3$

5) L'accroissement d'une population est proportionnelle à sa population. La population double tous les 50 ans, en combien de temps triple-t-elle ?

a) 75 ans b) 77 ans c) 79 ans d) 81 ans

EXERCICE 2

Primitives **(4 points)**

1) Soit la fonction f définie sur $]0\,;\,1[$ par : $f(x) = \dfrac{3x-1}{x(x-1)}$

a) Déterminer les réels a et b tels que : $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1}$

b) En déduire une primitive de la fonction f sur $]0\,;\,1[$.

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x^2 + 1)\,\mathrm{e}^x$

   a) Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction h telle que $h(x) = (ax^2+bx+c)\,\mathrm{e}^x$ soit une primitive de la fonction g.

   b) Déterminer la primitive G de g telle que $G(0) = 1$.

Exercice 3

Taux d'alcoolémie **(6 points)**

Le taux d'alcoolémie est la quantité d'alcool pur par litre de sang, elle s'exprime en gramme par litre. Soit $f(t)$ le taux d'alcoolémie, après un temps t en heures, d'une personne ayant absorbé une quantité d'alcool.
Cette fonction f vérifie l'équation différentielle (E) : $y' + y = 4\mathrm{e}^{-t}$

1) Déterminer le réel a pour que la fonction p définie sur $\mathbb{R}_+$ par $p(t) = at\,\mathrm{e}^{-t}$ soit une solution particulière de (E).

2) Résoudre alors l'équation (E).

3) Déterminer la fonction f solution de (E) telle que $f(0) = 0,2$.

4) Déterminer le temps t_0 pour lequel le taux d'alcoolémie est maximum.
   Quel est alors ce taux en g.ℓ^{-1} ?

5) On désire connaître le temps $t_1 > t_0$ à partir duquel la personne pourra prendre le volant c'est à dire lorsque $f(t) \leqslant 0,5$.

   a) Recopier et compléter l'algorithme ci-contre afin qu'il donne ce temps t_1 au quart d'heure près.

   b) Quel est alors le temps nécessaire pour que la personne reprenne la route.

```
from math import*
t=1
f=...
while ......:
    t=...
    f=......
print(...)
```

Exercice 4

Équations différentielles et dissolution d'un composé chimique **(5 points)**

1) Soit l'équation différentielle (E) : $2y' - 3y = 9$.

   a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E).

   b) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(-1) = 1$

2) La vitesse de dissolution d'un composé chimique dans l'eau est proportionnelle à la quantité restante. On place 20 g de ce composé chimique dans l'eau.

   On note $q(t)$ la quantité restante, en g, du composé en fonction du temps t exprimé en minutes.

   a) Que vaut $q(0)$?

   b) Au bout de 5 minutes, il ne reste que 10 g. Montrer que $q(t) = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{5}t}$.

   c) Déterminer le temps nécessaire pour qu'il ne reste qu'un gramme de ce composé ?
   On donnera ce temps à la seconde près.