Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 25 mars 2024

Exercice 1

QCM **(5 points)**

1) **Réponse c)** : $F(x) = x\ln x - x \;\Rightarrow\; F'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x$.

2) **Réponse d)** : $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(2x\mathrm{e}^{x^2}\right) = \dfrac{1}{2}u'\mathrm{e}^u \;\Rightarrow\; F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^u + k = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + k$

   $F(0) = 1 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{2} + k = 1 \;\Leftrightarrow\; k = \dfrac{1}{2}$ d'où $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + \dfrac{1}{2}$

3) **Réponse a)** : $f(x) = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{-2x}{1-x^2} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u} \;\Rightarrow\; F(x) = -\dfrac{1}{2}\ln|u| \overset{x\in]-1\,;\,1[}{=} -\dfrac{1}{2}\ln(1-x^2)$

4) **Réponse a)** : les solutions sont du type $f(x) = k\mathrm{e}^{-t} + 3$.

   $f(\ln 2) = 1 \;\Leftrightarrow\; k\,\mathrm{e}^{-\ln 2} + 3 = 1 \;\Leftrightarrow\; k\,\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{2}} = -2 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{2}k = -2 \;\Leftrightarrow\; k = -4$.

5) **Réponse c)** : Soit $p(t)$ la population à l'instant t en années. On a :

   $p' = ap \;\Rightarrow\; p(t) = k\mathrm{e}^{at}$ on a alors $p(0) = k$. La population double en 50 ans donc

   $\dfrac{p(50)}{p(0)} = 2 \;\Rightarrow\; \mathrm{e}^{50a} = 2 \;\overset{\ln}{\Rightarrow}\; 50a = \ln 2 \;\Rightarrow\; a = \dfrac{\ln 2}{50}$. La population triple pour t

   donc : $\dfrac{p(t)}{p(0)} = 3 \;\Rightarrow\; \mathrm{e}^{\frac{\ln 2}{50}t} = 3 \;\overset{\ln}{\Rightarrow}\; \dfrac{\ln 2}{50}t = \ln 3 \;\Rightarrow\; t = \dfrac{50\ln 3}{\ln 2} \approx 79,2$.

Exercice 2

Primitives **(4 points)**

1) a) $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} = \dfrac{ax - a + bx}{x(x-1)} = \dfrac{(a+b)x - a}{x(x-1)}$

   Par identification à $f(x)$, on a : $\begin{cases} a + b = 3 \\ -a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 - 1 = 2 \end{cases}$

   b) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x-1}$ d'où $F(x) = \ln|x| + 2\ln|x-1| \overset{x\in]0\,;\,1[}{=} \ln x + 2\ln(1-x)$.

2) a) On dérive la fonction h :

   $h'(x) = (2ax + b)\mathrm{e}^x + (ax^2 + bx + c)\,\mathrm{e}^x = (ax^2 + (2a+b)x + b + c)\,\mathrm{e}^x$

   On identifie $h'(x)$ à $g(x)$: $\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2a = -2 \\ c = 1 - b = 3 \end{cases}$

   Donc $h(x) = (x^2 - 2x + 3)\,\mathrm{e}^x$

   b) $G(x)$ est de la forme $G(x) = h(x) + k = (x^2 - 2x + 3)\,\mathrm{e}^x + k$

   $G(0) = 1 \;\Leftrightarrow\; 3 + k = 1 \;\Leftrightarrow\; k = -2$ d'où $G(x) = (x^2 - 2x + 3)\,\mathrm{e}^x - 2$.

EXERCICE 3

Taux d'alcoolémie **(6 points)**

1) Si la fonction p est solution de (E), on a :

$$p'(t) + p(t) = 4\mathrm{e}^{-t} \iff a\mathrm{e}^{-t} - at\,\mathrm{e}^{-t} + at\mathrm{e}^{-t} = 4\mathrm{e}^{-t} \iff a\mathrm{e}^{-t} = 4\mathrm{e}^{-t} \overset{\div \mathrm{e}^{-t}}{\iff} a = 4$$

La fonction p définie par $p(t) = 4t\,\mathrm{e}^{-t}$ est solution de (E)

2) Soit y une solution générale de (E), par soustraction terme à terme dans (E) de la solution générale y à la solution particulière p, on obtient :

$$(y' - p') + y - p = 0 \iff (y-p)' = -(y-p) \overset{z=y-p}{\iff} z' = -z \quad \text{(E')}$$

L'équation (E') est homogène du premier ordre donc $z(t) = k\,\mathrm{e}^{-t}$, $k \in \mathbb{R}$

On revient à la fonction y : $y(t) = z(t) + p(t) = k\,\mathrm{e}^{-t} + 4t\,\mathrm{e}^{-t} = (4t+k)\,\mathrm{e}^{-t}$, $k \in \mathbb{R}$.

On vérifie en remplaçant ces fonctions y dans (E) que ces fonctions sont bien solutions.

3) $f(t) = (4t+k)\,\mathrm{e}^{-t}$ donc $f(0) = 0,2 \iff k = 0,2$ d'où $f(t) = (4t + 0,2)\,e^{-t}$

4) On dérive la fonction f : $f'(t) = 4\,\mathrm{e}^{-t} - (4t + 0,2)\,\mathrm{e}^{-t} = (-4t + 3,8)\,\mathrm{e}^{-t}$.

$$f'(t) = 0 \overset{\mathrm{e}^{-t} \neq 0}{\iff} -4t + 3,8 = 0 \iff t = \frac{3,8}{4} = 0,95 \text{ et signe } f'(t) = \text{signe } (-4t + 3,8).$$

x	0		0,95		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0,2	↗	$f(0{,}95)$	↘	

$t_0 = 0,95$ soit 57 mn et $f(0,95) \approx 1,55$.

Le taux alcoolémie maximum est 1,55 g.ℓ^{-1}.

5) a) On peut proposer l'algorithme suivant :

```
from math import*
t=1
f=4,2*exp(-1)
while f>0,5:
    t=t+0.25
    f=(4*t+0.2)*exp(-t)
print(t)
```

b) L'algorithme renvoie : $t_1 = 3,5$

La personne peut reprendre la route après 3h30.

EXERCICE 4

Équations différentielles et dissolution d'un composé chimique **(5 points)**

1) a) (E) : $2y' - 3y = 9 \iff y' = \frac{3}{2}y + \frac{9}{2}$, les solutions sont de la forme :

$$y(x) = k\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}t} - \frac{9}{2} \times \frac{2}{3} = k\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}t} - 3\,,\quad k \in \mathbb{R}$$

b) $f(-1) = 1 \iff k\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} - 3 = 1 \iff k = 4\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ d'où $f(x) = 4\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}(t+1)} - 3$

2) a) $q(0) = 20$

b) Soit a le coefficient de proportionnalité, on a : $q' = aq$ d'où $q(t) = k\,\mathrm{e}^{at}$.

- $q(0) = 20 \Rightarrow k = 20$
- $q(5) = 10 \Rightarrow 20\,\mathrm{e}^{5a} = 10 \Rightarrow \mathrm{e}^{5a} = \frac{1}{2} \overset{\ln}{\Rightarrow} 5a = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{\ln 2}{5}$

c) $20\,e^{-\frac{\ln 2}{5}t} = 1 \iff e^{-\frac{\ln 2}{5}t} = \frac{1}{20} \overset{\ln}{\iff} -\frac{\ln 2}{5}t = \frac{1}{20} \iff t = \frac{5\ln 20}{\ln 2} \approx 21,61$

Il faudra 21 mn et 37 sec pour qu'il ne reste plus qu'un gramme.